

新东方考研数学名师团队匠心打造

魔研考研系列丛书



之

线性代数

小侯七　周洋鑫　崔原铭　主编

清華大学出版社

魔研考研数学之
线性代数

小侯七　周洋鑫　崔原铭　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书以教育部最新颁布的线性代数教学大纲和教育部考试中心组织编写的考研大纲为依据，内容包括了考研数学中线性代数的全部考点和相关内容.全书各章节均按照讲、练、考（自测）的结构编写，书中例题甄选自历年考研真题和经典题型，使学生在学习上形成一套闭环，而且本书中的“魔研君点睛”是一大特色.

本书通俗易懂、深入浅出，可作为考研数学的备考用书，也可作为大学数学学习的辅导用书，以及数学爱好者的自学教材.

图书在版编目（CIP）数据

魔研考研数学之线性代数/小侯七，周洋鑫，崔原铭主编.—北京：清华大学出版社，2018
（魔研考研系列丛书）
ISBN 978-7-302-51365-0

Ⅰ.①魔…　Ⅱ.①小…②周…③崔…　Ⅲ.①线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 232184 号

责任编辑：汪　操
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　　张**：11　**字　　数**：266 千字
版　　次：2018 年 10 月第 1 版　**印　　次**：2018 年 10 月第1 次印刷
定　　价：36.00 元

产品编号：078804-01

魔研考研系列丛书编委会

前　　言

一个出身武术世家的数学老师的数学梦

小侯七

在来到新东方做考研数学老师之前，我最为人知的身份是“侯家拳传人”. 我 8 岁开始跟随爷爷学习祖传的侯家拳，那时学的是皮毛；十几岁的时候拜师吉林武术名家陈国诚，系统地学习了陈式太极拳和一些刀法、剑法，算是小有成绩；到大庆后，与东北众多武术名家亦师亦友，学到了包括太极拳、螳螂拳、查拳在内的很多拳种；再后来到上海，更是得到了武术泰斗“神拳大龙”蔡龙云老先生的指点，将原本无标准套路的侯家拳虎搏功整理出入门三大母拳：静山桩、虎搏缠手、川杨功.

我不仅仅是学功夫，更是热衷于传播功夫，先后成立过“中华振武会”“Tiger 武学堂”等武术组织，搞国际武术文化推广. 前前后后有十几个国家的留学生和访华团体，都是带着我教给他们的中国功夫回到自己的国家的.

为什么在武术界风生水起的我，突然转行到了教育行业？其实不是转行，而是“谋条生路”. 振兴武术是我一生的坚持，只要我还活着，只要有机会，我就肯定会把中国的国粹推广和发扬. 但同学们，追求梦想的前提是活下去，活下去就需要有经济来源. 而我振兴武术略显“愚忠”，从来不收一分钱，既不收个人的学拳费，也不收组织的劳务费，除了收过上海理工大学日本文化交流中心的 200 元补贴外，这辈子在武术上我没赚过其余一分钱.

侯氏家族虽不敢称名门望族，但家中一直都有代代相传的家族文化，武术在我们家族是神圣的，能和我学习侯家拳，说明我们有缘分，你我是有缘人，怎么还能收费呢？绝对不可以. 可我到底该靠什么来生活？随随便便对付一份工作？那样我觉得是浪费人生.

我有三大爱好，还有三种爱吃的食物，分别是“读书、练武、做数学，牛肉、土豆、炒番茄”. 读书我曾经做过“小侯七读书会”，虽然影响不大，但充满着读书人的情怀；练武自不用多说，我骨子里都流着武术人的血液，对我来说举手投足都是练武，唯一没真正去做的那就是做数学了.

我自小就喜欢数学，尤其高中时遇到了一位有魔力的班主任数学老师，更是让我对数学产生了浓厚的兴趣. 如果说一定要让我找一个可以维持生计的工作，那我毫无疑问会选择做数学. 最重要的是，做数学是我的三大爱好之一，与我那充满浓浓情怀的人生规划并不矛盾.

就这样，我来到了上海新东方，一不留神在终极面试中成为了全校第一名，做了考研数学老师，更是一不留神还成了考研数学项目组长、考研数学教研负责人，当了“官”了.

从我做考研数学老师那天起，我给自己定了三个规矩：踏踏实实教知识，认认真真搞教育，堂堂正正为人师. 每次面对学生或者走上讲台前，我都会提醒自己，千千万万不能忘了这三个规矩. 所以，在以往的教职生涯中，我敢拍着胸脯说做到了无愧于心.

在和学生的交流中，我发现很多学生的基础并不好. 有些同学可能是毕业多年，早已经将数学知识还给当年的老师了；有些同学虽在校园但前几年没有认真学数学，现在决定要考研才发现自己的数学不行. 什么原因导致的数学基础不好，我并不关心，我只关心如何能把数学教好，如何能让打算考研的同学们把数学学好.

市面上考研数学的辅导书非常多，而且大多写得都不错，但我也有自己的想法，比如能不能用通俗、直白、“接地气”的语言解释数学概念，能不能有让同学们一目了然、一点即通的“点睛”部分，等等. 带着这些想法，2017 年愚人节，我便与我的挚友清华大学出版社汪操老师沟通，他对我的想法很支持，给出了很多建议. 就这样，我开始组建团队，周洋鑫和崔原铭这两位优秀的考研数学老师走进了我的视野.

我和周洋鑫初识是在 2017 年 9 月，当时新东方教育科技集团组织教师赛课，洋鑫是数学组赛课第一名. 他的讲课风格和对数学的理解，我非常欣赏. 从那时起我们成了彼此考研数学圈最好的朋友之一. 深入了解后我得知，他是北京新东方的骨干名师、博士，对数学有着独特的认知. 我将我的图书规划讲给他听，他非常激动，说：“侯哥，这正是我想要的考研数学辅导用书.”还记得有一天，我去北京出差，他带着我逛他博士就读的母校，边走边和我说他关于数学的梦想，以及他对爱情、事业甚至人生的规划. 我静静地听着，心中却早已无法压抑那份激动，因为我觉得此人绝非等闲之辈，实乃有鸿鹄之志的“天才少年”. 就这样，我正式邀请他加入我的团队，全面参与“魔研考研数学系列”的编写工作. 事实证明，我的决定是正确的.

崔原铭是复旦高才生，曾经在上海新东方兼职，但由于各种原因并没有上台讲课，毕业后去了上汽通用汽车有限公司工作. 在我刚刚担任考研数学项目组长的时候，他就特别积极地联系我，说要重回新东方，实现自己的数学梦. 当时我由于课程任务重，管理工作繁忙，所以并没有“搭理”他. 但他特别执着，一定坚持要见我，于是我就约他来了上海新东方总部. 还记得那是 2017 年 10 月的一个下午，我俩在上海新东方总部咖啡吧第一次见面，在接下来的沟通中，我发现他竟然也是个数学天才，2017 年我接触的全国考研数学老师数以百计，新东方数学团队也有七八十人，让我“心动”的除了洋鑫，就是原铭了. 还记得在上海南京东路一家餐厅用餐时，他说：“侯哥，数学并不枯燥，是讲课人的方法太枯燥；数学可以很通俗易懂，是易懂的书太少. 就像做菜一样，材料都相同，要有一个好厨师调配.”后来，他正式加入到新东方考研数学的大家庭，其超强的能力也得到了其他同事的认可. 再后来，我又把他拉进“魔研考研数学系列”的编写团队.

我们三人的合作非常愉快，三本书我们都有参与，但根据各自的擅长，每本书每人负责若干章节. 在很多人眼里，写这种辅导用书，不就是“复制”和“粘贴”吗？但看拳和打拳真不一样，我们对每个概念都会选自己认为最恰当的描述方式，对每一道题的选取都精挑细琢、深思熟虑，并且在课堂上通过学生检验.

最让我感动的是 2018 年除夕夜，当晚 10 点左右，在安徽泾县“娘家”过年的我刚刚陪完亲戚，打算拿出电脑和一堆材料开始整理书稿的时候，突然洋鑫来电，他略带疲惫地问：“侯哥在干嘛？”

我打了个哈欠说：“酒也喝了，鞭炮也放了，饺子也包了，该写写书、做做题了.”

洋鑫一下子兴奋起来，说：“我也正打算写书稿，要不我们一起？”

因为对数学知识点的认识需要全面和准确，所以我们三人经常讨论，因此常常会保持语

音通话的状态一起写书.

我说:"不知道原铭有没有空."

洋鑫说:"是他打电话告诉我,他要写书稿,恰好我也有此意,才给你打的电话."

那一瞬间我感动了.两个兄弟都这么努力,我这当大哥的还能掉队吗?必须写起来!

……

我要感谢上海新东方王洛老师、新东方集团张伟老师、清华大学出版社汪操老师,还要感谢我的助理老师们,在我因工作量大而无法分身时,他们帮我梳理了部分基础性材料,花费了大量心血.最后,感谢新东方教育科技集团和清华大学出版社的大力支持,是你们让"魔研考研数学系列"有了诞生的可能.

总体来说,《魔研考研数学之高等数学》《魔研考研数学之线性代数》和《魔研考研数学之概率论与数理统计》是我和洋鑫还有原铭倾尽心血完成的三本书,但由于能力有限、时间仓促,在编写过程中难免有不足之处,请读者、同行以及专家朋友们多多提出宝贵意见,我们愿意积极改正并同步提高.

小侯七敬上.

小侯七

新浪微博:小侯七

导　　学

有一次在高铁上，小侯七老师突然问我："洋鑫，线性代数从近十几年的考研真题上看，题型以及出题方式早已模式化了，那么为什么有些学生已经非常努力了但却还是分数不高呢？"我顿时陷入了深思. 直到后来我才渐渐意识到"可能是认识的原因"，也许的确是大家并没有正确复习的认识，对考点的把握没那么精准，复习没有重点，导致很多学习时间的荒废. 因此，我觉得很有必要带着大家从出题人的角度聊一下线性代数的考研那点事！

线性代数是考研数学三大分支之一，从 2006 年新考研试卷结构开始，在试卷中主要考查两个选择题（2×4 分＝8 分）、一个填空题（1×4 分＝4 分）、两个解答题（2×11 分＝22 分），在总分为 150 分的试卷中占据 34 分的重要位置. 一般地，数学一、数学二和数学三在线性代数的考题中已经趋近统一了，除了数学一在大纲要求上多出"向量空间"部分的内容以外，大致已是一样的了. 因此，这里我主要聊聊最后两个解答题的大致出题点和解题套路. 可能在一开始你不能有深层次的理解，但是当大家学完整本书后再回过头来看时，可能就会有更深层次的理解了.

这两道大题的大致埋伏点，我将其比作"两驾马车".

第一驾马车　向量、方程组两兄弟

下面给出一个一般的非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad \text{【形式一】}$$

运用矩阵乘法，不难得到

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{简记为 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}. \quad \text{【形式二】}$$

其系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，未知量向量为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，常数项向量为 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

对形式一做恒等变形，则

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

若记$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$，$j=1,2,\cdots,n$，则当$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$时，原方程组就转化为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}\text{，}\qquad\text{【形式三】}$$

即方程组这三种形式是彼此等价的.

对于形式三，不难发现其恰恰就是“$\boldsymbol{\beta}$能否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示”的问题，而且线性表示的系数恰好是非齐次线性方程组的解. 于是得出结论一：**非齐次线性方程组的求解与常数项向量能否由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示根本上讲是同一个问题.**

若常数项向量$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，方程组就转化为了齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，同理形式三也就变成 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$. 这个表述与我们在“线性相关、线性无关”中讨论的不谋而合. 具体点讲，“存在一组不全为零的系数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 成立时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关”⇔“$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解”；“若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 成立，仅有所有系数全为零，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关”⇔“$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解”.

因此，得到结论二：**齐次线性方程组的求解与 $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量间的线性相关性根本上讲是同一个问题.**

在上面的基础上，我们可以在攀爬的路上更进一步，继续讨论下一个问题. 在此，引入矩阵方程概念：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1m}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix},\qquad\text{【形式一】}$$

简记为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$. 其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$为系数矩阵，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1m}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nm}\end{pmatrix}$为未知量矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$为常数项矩阵.

若记 $\boldsymbol{x}_j=\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\\vdots\\x_{nj}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{pmatrix}$，$j=1,2,\cdots,m$，则矩阵方程形式一转化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_m) = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_m)$$
$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m) = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_m)$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1,2,\cdots,m.$$
【形式二】

根据结论一可知，上式表示的意义是“$\boldsymbol{\beta}_j$ 能否由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示”，换句话讲就是“$\boldsymbol{B}$ 的列向量组能否由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示”. 处理问题时，我们需要求解 m 个同系数矩阵的非齐次线性方程组，对应的解 $\boldsymbol{x}_j$ 就是 $\boldsymbol{\beta}_j$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组表示的系数. 因此，不难得出结论三：**矩阵方程的求解与向量组间的线性表示在根本上讲是同一个问题.**

这里的三大结论，也就是考研线性代数的第一个大题的高频考点. 从基本出发，线性方程组的求解就变得尤为重要. 在求解中，都是对系数矩阵（或增广矩阵）进行行初等变换化为行最简矩阵然后求解，这种基本的思路方法，一定要熟练掌握、融会贯通！

第二驾马车　矩阵相似对角化和二次型

二次型的问题实际上是实对称矩阵相似对角化的一个几何应用，所以先来谈谈矩阵的相似对角化.

所谓矩阵相似对角化，即是“一个矩阵与一个对角矩阵相似”. 回到定义上，则可表述为“存在一个可逆矩 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$（对角矩阵）”.

假设已经找到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，我们一起再看看使得相似对角化的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及相似对角化结果 $\boldsymbol{\Lambda}$ 都满足什么关系.

将 $\boldsymbol{P}$ 表示为分块列矩阵形式：$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n)$，根据 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\boldsymbol{\beta}_n)$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j = \lambda_j\boldsymbol{\beta}_j, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

不难得知，λ_j 为 $\boldsymbol{A}$ 所对应的特征值，$\boldsymbol{\beta}_j$ 为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 所对应的特征向量. 因此，$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值构成了相似对角化的结果 $\boldsymbol{\Lambda}$，特征向量作为列向量构成了 $\boldsymbol{P}$，并且 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列次序与对角矩阵主对角线上的特征值排列次序要一一对应，这就是相似对角化的计算问题的核心. 正是有了这些问题，才使得特征值和特征向量这组概念变得有意义！

这些问题讨论结束后，就可以去研究二次型的问题了，这里只讲最主要的“正交变换法化标准形问题的缘由”.

对于一般的二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 而言，其二次型对应的矩阵是实对称矩阵，而对于标准形

的二次型其所对应的矩阵是对角矩阵.我们通过变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形时，$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \Rightarrow f=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}$.若要使得变换完结果是对角矩阵，只需要完成一个问题，即 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$（对角矩阵）.

前面已经讨论过对角化的问题，但只能找到一个可逆矩阵进行相似对角化，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，这是个重要问题！切换下思路，如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，那不就解决了嘛！于是，正交矩阵走上了考研的舞台！正交矩阵刚好能满足这样一个条件，根据性质“实对称矩阵一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$”，似乎一切的谜团即将打开！

这里我不细致去讲解，单纯地给出“一个矩阵满足什么条件才能是正交矩阵”问题的答案，需要满足两点：

（1）该矩阵的列向量间彼此正交；

（2）该矩阵的列向量均为单位向量.

原本使得相似对角化的 $\boldsymbol{P}$ 是一个可逆矩阵，列向量间仅仅满足线性无关的性质，所以只需要进一步对其列向量进行正交化（施密特正交化），再单位化，就可以将其化为正交矩阵了.于是一切都大功告成了！

见识了这两驾马车，大家肯定对这部分有了更新的认识，带着这种认识再去看看本书中详细讲解的每章内容吧！大家肯定会有“柳暗花明又一村”的感觉，这也是考研线性代数中的核心.

最后，我再谈谈本书的用法.

本书用法指南

全书总共分 6 章，每章都由“考研大纲要求与重点导学”“必会基本内容”“考试题型与解析”“自测题精选”四大部分组成.

（1）考研大纲要求与重点导学.本部分主要阐述大纲在各个章节的要求，分析大纲的考点内容，目的是让大家更加具有侧重点、方向性地进行复习备考.

（2）必会基本内容.本部分主要对大纲所要求的知识点进行讲解，这是本书每个部分的基础片段.同时，在每个繁杂知识点下加入“魔研君点睛”的详细解读，并且后面紧接着“小试牛刀”部分加以训练，使得大家更好地理解与把握基本知识，完成考研基础的第一阶段.

（3）考试题型与解析.本部分是本书的核心内容，通过每章节的核心知识点，从题型角度进行分类.每个类型问题都会先对方法加以总结，然后通过精挑细选的经典习题加以强化训练，让大家可以更好地把握考研，进入到知识理解的第二阶段.

（4）自测题精选.本部分旨在帮助大家学以致用，锻炼自己独立处理问题的能力，这个阶段是知识理解的内化与升华.

在使用本书的过程中，依照线性代数学科学习的特点，给大家提供三个建议：

（1）注重基础知识和基础运算.线性代数课程最大的特点就是：基础知识点多，易混淆；基础运算繁杂，易出错.所以，在复习过程中，要多注意基本知识点的内在联系，多进行基础运算，处理过程切忌粗心大意.

（2）注重知识框架体系的建立.线性代数课程的难度在于 6 章内容的紧密联系，比如单

从“行列式、矩阵的秩、向量组线性相关性、方程组、特征值”就可以作为一条主线进行知识联系，所以在复习过程中，要多从不同角度联系6章知识.

（3）重复，再重复.“温故而知新”，很多知识点是需要重复与揣摩才能理解深刻的，很多练习题也只有通过不断温故才能更加熟练.因此，重复地学习，不断地训练，将会收获更多.

启程吧，同学们，朋友们！考研的征途上，我们一路同行！

在此，感谢我的团队好友——一同夜以继日打磨书稿的小侯七老师、崔原铭老师.魔研考研数学这套书出版问世的这一天，我们三人激动之情难以言表，很多回忆都伴随着我们共同的愿景——“为考研学子更轻松、更快乐地学习数学而奋斗”变得更有使命感、仪式感.除夕夜团圆饭后彻夜写书，课程连连的疲惫后继续改稿，视频会议讨论直至深夜……，回想起，难以诉说的感动！事无巨艰，何来人杰.生活在永不遏制的奋斗中变得生生不息，你我皆是如此，奋斗吧！

所有的伟大，都源于一个勇敢的开始！请不要放弃，继续努力.

最后，再次感谢魔研团队的共同努力，同时也感谢清华大学出版社的大力支持，感谢所有为本书付出辛勤汗水、提出宝贵意见的人.鉴于编者能力有限，书中疏漏之处在所难免，若有不足之处，恳请读者和同行专家批评指正.

周洋鑫

新浪微博：考研数学周洋鑫

目　　录

第 1 章 行列式

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	了解行列式的概念,掌握行列式的性质	数学一、二、三
2	会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

在复习考研线性代数这门学科时,行列式是最先接触到的一个概念.对于 n 阶矩阵,n 这个量就包含着巨大的信息,它可以帮助我们判断矩阵是否可逆、矩阵的行(列)向量是否线性无关.准确理解行列式的概念和性质是第 1 章复习的重中之重.

在考研中,行列式的考查形式千变万化,但是归根结底需要掌握的是行列式的具体算法,即:(1)利用行列式各种性质计算数值型行列式;(2)与矩阵性质相结合,计算抽象型行列式;(3)掌握行列式展开定理,解决余子式相关问题.

必会基本内容

一、n 阶行列式基本定义

1. 排列和逆序

排列:把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的(全)排列.

逆序数:对于一个排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$,考虑元素 p_i,如果 p_i 前面的元素中比 p_i 大的有 t_i 个,则 p_i 这个元素的逆序数是 t_i,全体元素的逆序数和 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$ 即是这个排列的逆序数.

奇排列和偶排列:如果一个排列的逆序数为奇数,则称这个排列为奇排列,否则为偶排列.

小试牛刀

【例 1.1】 求排列 1423 的逆序数.

解析 元素 1 前面没有元素,逆序数为 0.

元素 4 前面没有比它大的元素,逆序数为 0.

元素 2 前面有一个 4 比它大,逆序数为 1.

元素 3 前面有一个 4 比它大，逆序数为 1.

所以，1423 的逆序数为 $0+0+1+1=2$.

2. n 阶行列式的定义式

n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 是选取的不同行不同列的 n 个元素，共 n^2 组，t 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 这个排列的逆序数. 从而可以推出二阶和三阶行列式的公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^0a_{11}a_{22}+(-1)^1a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}+\\ &\quad(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

魔研君点睛

用 n 阶行列式的定义式可以写出任意阶行列式的值，但是超过三阶之后，公式就会变得极为复杂. 因此，高阶行列式化简就显得极为关键，此时要用到行列式的完全展开式.

二、行列式的完全展开式

在 n 阶行列式中，将 a_{ij} 所在的行和列划去，剩下的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij} 叫做 a_{ij} 的代数余子式.

例如，对于行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，元素 2 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=36-42=-6$，而它的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=6$.

行列式的完全展开式

定理 1.1 行列式的值等于行列式任意一行(列)的元素与它对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

定理 1.2 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

小试牛刀

【例 1.2】 求 $\begin{vmatrix}1&3&2\\2&5&6\\0&2&4\end{vmatrix}$.

解析 方法 1 按第 1 行展开,得

$$1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\2&4\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&6\\0&4\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&5\\0&2\end{vmatrix}$$
$$=8-24+8=-8.$$

方法 2 按第一列展开,得

$$1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\2&4\end{vmatrix}+2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&2\\2&4\end{vmatrix}$$
$$=8-16=-8.$$

三、行列式的性质

1. 行列式与它的转置行列式相等.

2. 对行列式某行(列)可以做分解. 例如,若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}$都是三维列向量,则$|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}|+|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|$.

魔研君点睛

矩阵以及向量相加减,是将每一个分量各自相加减,而行列式的相加减,只是对单行(列)的运算,并且需要其余行(列)完全相同才能相加减.

3. 对换行列式的两行(列),则行列式变号.

推论 行列式有两行(列)完全相同,则行列式等于 0.

证明 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行相同,则对调那两行得到$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$,则$|\boldsymbol{A}|=0$. 证毕.

4. 将行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+kc&b+kd\\c&d\end{vmatrix}.$$

5. 行列式每一行(列)的公因子可以提到行列式记号外面.

$$\begin{vmatrix}ka&kb\\c&d\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}.$$

需要注意的是$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$,因为

$$\left|k\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}ka_{11}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&&\vdots\\ka_{n1}&\cdots&ka_{nn}\end{vmatrix}=k^n\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

魔研君点睛

常数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘,得到的结果是 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素相乘. 而 k 与行列式相乘,就是纯粹的两数相乘,这一点大家一定不能混淆.

推论 行列式若有某两行(列)成比例,则行列式等于 0.

魔研君点睛

在计算行列式的时候,要熟练运用行列式的性质将其化简,再用行列式的完全展开式来计算.这个计算功底一定要在复习行列式的时候就打牢,因为在后面的复习中,无论是矩阵的初等变换还是求解线性方程组,都需要强大的计算功底做支撑.

小试牛刀

【例 1.3】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

解析 (1) 保留 a_{33},将第 3 列的 -2 倍加至第 1 列,再将第 3 列加至第 4 列,化简可以得到

$$D=\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 3 行}}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}.$$

(2) 再将 $\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$ 的第 1 行加至第 2 行,得

$$D=\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 3 列}}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40.$$

四、几种特殊行列式

1. 上、下三角形行列式及对角型行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&\iddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&\\\vdots&\iddots&&\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&\\&\iddots&&\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}\cdot a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}.$$

魔研君点睛

（1）对于上、下三角形行列式及对角型行列式，我们只能挑出一组不含 0 的不同行不同列的元素，即 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$，因而根据 n 阶行列式的定义式，$|\boldsymbol{A}| = (-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，对于 $123\cdots n$ 这个排列，它的逆序数为 0，则 $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

（2）同样地，对副对角线行列式，我们也只能挑出一组不含 0 的不同行不同列的元素 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$，而对排列 $n(n-1)\cdots 1$ 来说，它的逆序数 $t = 1+2+\cdots+n-1 = \frac{1}{2}n(n-1)$，所以 $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

3. 范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j).$$

考试题型与解析

题型一：数值型行列式的计算

方法一：行列式展开公式求解

【例 1.4】 求下列行列式的值.

（1）$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解析　本题是考研真题，考查的是约简行列式后展开计算的能力. 一般遇到这种题目，解题策略是将行列式化简出尽可能多的 0 后再展开.

（1）将原式按第 4 列展开，得

$$\text{原式} = (\lambda+1)(-1)^{4+4} \cdot \lambda^3 + (-1) \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3(\lambda+1) + \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

(2) 将原式按第 1 列展开,得

$$\text{原式}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}$$
$$=1-a^4.$$

方法二:利用行列式性质

【例 1.5】 记 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$,则 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

解析 这道题目考的就是行列式的化简,需要利用行列式的一系列性质将 $f(x)$ 的表达式写出来.

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{-C_1+C_3\\-C_1+C_4}]{-C_1+C_2}\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-3\\4x&-3&x-7&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_2+C_4}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2&-2\\x-7&-3\end{vmatrix}$$
$$=5x(x-1)=0,$$

则 $x=0$ 或 1. 故选(B).

【例 1.6】 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$(　　).

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

解析 这是 2014 年数学一的真题,考查的是用分块矩阵求行列式的知识.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(cb-ad)(ad-cb)=-(ad-bc)^2.$$

故本题选(B).

魔研君点睛

分块矩阵行列式计算.

若 $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{B}_m$ 分别为 n 阶,m 阶方阵,则

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{C}_{n\times m} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_{m\times n} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{B}_m|$;

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{C}_{m\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{B}_m|$;

(3) 注意,$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} \neq |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$.

【注】 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}$ 的形式非常复杂,考研中不会作要求,感兴趣的同学可翻阅相关文献自行学习.

【例 1.7】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & & \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & & & \\ & -1 & 1-b_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-b_{n-1} & b_n \\ & & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

解析 此题考查的是顺次相加化简计算行列式的方法.

先将第 1 行加至第 2 行,再将第 2 行加至第 3 行,……,得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & & \\ & -1 & 1-b_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-b_n & b_n \\ & & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ & 1 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & b_n \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

方法三:提取公因子

【例 1.8】 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

解析　观察发现，行列式每一列元素的加和都是$a+(n-1)b$，又联系到行列式同一行（列）可以提取公因子。

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{减去第 1 列}]{\text{第 } 2\sim n \text{ 列依次}} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & & & \\ b & a-b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & & & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【例 1.9】 $D=\begin{vmatrix} 1+n & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+n & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+n & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+n \end{vmatrix} =$________.

解析

$$D=\begin{vmatrix} 10+n & 2 & 3 & 4 \\ 10+n & 2+n & 3 & 4 \\ 10+n & 2 & 3+n & 4 \\ 10+n & 2 & 3 & 4+n \end{vmatrix}$$

$$= (10+n)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+n & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+n & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+n \end{vmatrix}$$

$$= (10+n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = (10+n)\cdot n^3.$$

【例 1.10】 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$________.

解析

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\cdot x^3\cdot(-1)^{\frac{1}{2}\times 4\times 3}$$

$$=x^4.$$

【例 1.11】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解析 (1) 将第 2～n 行加至第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

(2) 将第 n 列～第 2 列依次减去前 1 列，得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ \vdots & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

(3) 将第 2～$n-1$ 行加至第 1 行，得

$$D_n=\frac{n(n-1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & & -n & \\ & \iddots & & \\ -n & & & \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-1)^{n-1}\cdot n^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

方法四：初等变化化为三角行列式求解

魔研君点睛

求值任意一个数值行列式，用初等变换将其化为上、下三角形行列式都是一个万能方法，这里以一个四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 为例，具体操作步骤如下：

(1) 第 1 步，分别将 2,3,4 行减去特定倍数的第 1 行，目的是将 2,3,4 行第 1 列元素消为 0，得到 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & -11 \end{vmatrix}$；

(2) 第 2 步，将 3,4 行减去特定倍数的第 2 行，目的是将 3,4 行的第 2 列元素消为 0，得到 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) 第 3 步，用第 4 行减去特定倍数第 3 行，目的是将第 4 行第 3 列元素消为 0，得到 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$. 到这里，原行列式就化为了一个上三角形行列式，它的值为 -2.

【例 1.12】 求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.

解析 此题应先用第 $2\sim n$ 行减去第 1 行，将行列式中的 1 尽可能先约去，再观察其形式.

$$原式=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|.$$

我们发现，此时行列式化为了一个形如 $\begin{vmatrix}\overline{\ \ }\\ | \diagdown\end{vmatrix}$ 的行列式，即除了三条线上之外的元素都是 0. 因此，可以从第 2 列开始，依次将各列的 $\dfrac{a_1}{a_i}$ 倍加至第 1 列，从而将第 1 列的 $-a_1$ 消去，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a_1+\dfrac{a_1}{a_2} & 1 & \cdots & 1\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1+\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_1}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_1}{a_n} & 1 & \cdots & 1\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

【例 1.13】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，且 $|\boldsymbol{A}|=1$. $\boldsymbol{A}$ 的每一列减去其余各列所得矩阵记作 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

解析 数学化此题的题干可知，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的功能是令 $\boldsymbol{A}$ 的每一列减去其余各列，再一个知识点就是 $|\boldsymbol{AC}|=|\boldsymbol{B}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{B}|$，而 $|\boldsymbol{A}|=1$. 从而 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|$，所以此题的思路是先写出 $\boldsymbol{C}$，再求其行列式.

根据初等变换可知

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{AC}.$$

这里用例 1.12 的处理方法，将第 $2\sim n$ 行都减去第 1 行，消去尽可能多的 -1，即

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ -2 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -2 & & & 2\end{vmatrix},$$

再把第 $2\sim n$ 列加到第 1 列，目的是消去第 1 列的 -2，得到

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1+(-1)(n-1) & -1 & \cdots & -1\\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\end{vmatrix}=2^{n-1}(2-n).$$

魔研君点睛

“爪型行列式”的计算方法.

“爪型行列式”是考研中经常考查的一个点，而它的计算方法非常一致，就是“砍掉三爪中的横爪或竖爪”，具体操作方式如下.

例：求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

这是一个典型的“爪型行列式”，它可以从两个方向来计算：

(1) 通过初等行变换消去第一行的 2,3,4，即“砍掉横爪”；

(2) 通过初等列变换消去第一列的 $-2,-3,-4$，即“砍掉竖爪”.

“砍掉竖爪”，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2\times2+3\times1+4\times2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 96$；

“砍掉横爪”，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4+3+8 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 96.$

方法五：递推关系法

【例 1.14】 求 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & & & & 2 \\ -1 & 2 & & & 2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解析 这是 2015 年数学一的一道真题. 考查用递推关系法求行列式. 得出递推关系式的关键是找到同类型的低阶行列式，并尽可能减小计算难度.

按第 1 行展开行列式，得

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= 2D_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

又知 $D_1 = 2$，利用数列知识，得

$$\begin{aligned} D_n + 2 &= 2(D_{n-1} + 2) \\ &\Rightarrow D_n + 2 = (D_1 + 2) \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n+1}, \end{aligned}$$

故 $D_n = 2^{n+1} - 2$.

魔研君点睛

数学归纳法和递推关系法其实是一回事.一般来说,数学归纳法用于证明,而递推关系法用于计算.

拿到一个这类题目,大家心里要做出一个判断,看它能不能写出递推关系,如果能,那就先想办法写出递推关系.而考研中一般涉及的递推关系无非两种:(1)$D_n=aD_{n-1}+b$;(2)$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}+c$.

正常来说,考研线性代数不会涉及很复杂的数列,所以大家可以放心求解.这里要强调的是两类数学归纳法.

1. 第一类数学归纳法.

(1) 证明 $n=1$(或 $n=0$)成立;

(2) 假设 $n=k$ 成立;

(3) 证明 $n=k+1$ 成立,即可证明命题对任意 n 都成立.

2. 第二类数学归纳法.

(1) 证明 $n=1$ 成立;

(2) 假设 $n\leqslant k$ 成立;

(3) 证明 $n=k+1$ 成立,即可证明命题对任意 n 都成立.

一般来说,第一类递推关系因为仅涉及两个变量,则用第一类数学归纳法证明;而第二类递推关系因为涉及 3 个或 3 个以上的变量,则需要用第二类数学归纳法证明.

【例 1.15】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$, 证明:$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

证明 这里用数学归纳法进行证明.

(1) 当 $n=1$ 时,$D_1=2a$,结论成立.

(2) 假设对任意 $n\leqslant k$ 时,有 $D_n=(n+1)a^n$.

(3) 当 $n=k+1$ 时,

$$D_{k+1}=2aD_k-\begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k\times k}=2aD_k-a^2D_{k-1}.$$

因为 $D_k=(k+1)a^k$,所以 $D_{k+1}=2a(k+1)a^k-a^2ka^{k-1}=(k+2)a^{k+1}$,结论成立.证毕.

魔研君点睛

此题除了用数学归纳法,还可以用递推关系直接算出.

已知 $D_{n+1}=2aD_n-a^2D_{n-1}$，

令 $D_{n+1}-aD_n=A_n$，

则 $A_1=D_2-aD_1=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}-2a^2=a^2$，

则 $A_n=a^{n+1}$，

所以 $D_n-aD_{n-1}=a^n$，

$$aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a\cdot a^{n-1},$$

$$\vdots$$

$$a^{n-1}D_2-a^{n-1}D_1=a^n\cdot n,$$

累加得 $D_n-a^{n-1}\cdot 2a=a^n\cdot(n-1)$，

即 $D_n=(n+1)a^n$.

方法六：范德蒙德行列式

【例 1.16】 证明范德蒙德行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

证明 (1) 当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$ 成立.

(2) 当 $n=k$ 时，设 $D_k=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant k}(x_i-x_j)$ 成立.

(3) 当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k+1}\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{k+1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_{k+1}^k\end{vmatrix}\xlongequal{①}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_{k+1}-x_1\\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & \cdots & x_{k+1}^2-x_{k+1}\cdot x_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^k-x_1\cdot x_2^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^k-x_1\cdot x_{k+1}^{k-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & \cdots & x_{k+1}-x_1\\ x_2^2-x_1x_2 & \cdots & x_{k+1}^2-x_{k+1}\cdot x_1\\ \vdots & & \vdots\\ x_2^k-x_1\cdot x_2^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^k-x_1\cdot x_{k+1}^{k-1}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②}(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1}\end{vmatrix}.$$

①：第 $k+1$ 行减去 x_1 倍第 k 行，第 k 行减去 x_1 倍第 $k-1$ 行. 依次进行下去，第 2 行减去 x_1 倍第 1 行，将第 1 列约简，得

$$原式=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant k+1}(x_i-x_j).$$

②：从第 1 列开始，依次提取公因子 $x_2-x_1,x_3-x_1,\cdots,x_{k+1}-x_1$，得

$$原式=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant k+1}(x_i-x_j).$$

【例 1.17】 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}$.

解析 这道题给人的第一感觉就是它跟范德蒙德行列式的形式有些像.

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

但大家记忆时一定要清楚，行列式的行与列是等价的，即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，所以说

$$\begin{vmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

这道题就是从列的角度来思考.

$$D_n=2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!(n-1)!\cdots2!1!.$$

题型二：抽象型行列式计算

魔研君点睛

抽象型行列式因其可以将线性代数的各个知识点有机综合起来，所以是考研中的必考点，而本章例题立足于抽象型行列式计算，是复杂运算的基础，大家务必掌握.

一般来说，抽象型行列式的计算方法是利用矩阵的性质或者行列式的性质对行列式进行恒等变形，最后求出结果.

【例 1.18】 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$ 均为三阶矩阵，若已知 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}|=$________.

解析 此类题目是考研中的常见题型，即已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的抽象形式以及 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$ 的值，要求 $|a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}|$ 的值.

在做这类题目时，一定要记得，$|a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}|\neq a|\boldsymbol{A}|+b|\boldsymbol{B}|$. 正确解法是先求出 $|a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}|$ 的抽象形式，再进行计算.

$$|2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}|=|(2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\beta}_1)-(5\boldsymbol{\alpha}_1,5\boldsymbol{\alpha}_2,5\boldsymbol{\beta}_2)|$$

$$=|-3\boldsymbol{\alpha}_1,-3\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\beta}_1-5\boldsymbol{\beta}_2|$$ （到这一步为止，才可以运用行列式的性质进行运算）

$$=|-3\boldsymbol{\alpha}_1,-3\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\beta}_1|-|-3\boldsymbol{\alpha}_1,-3\boldsymbol{\alpha}_2,5\boldsymbol{\beta}_2|$$
$$=-3\times(-3)\times2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1|-(-3)\times(-3)\times5|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2|$$
$$=18|\boldsymbol{A}|-45|\boldsymbol{B}|$$
$$=36-135$$
$$=-99.$$

【例 1.19】 设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$是三维列向量,则下列与三阶行列式$|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$相等的行列式是(　　).

(A) $|\boldsymbol{\xi}_1,2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1-3\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3|$　　(B) $|\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1|$

(C) $|\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1|$　　(D) $|\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3|$

解析　方法 1　利用行列式乘法性质以及矩阵乘法性质.

对于(A),行列式$=\left|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}\right|=-|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$;

对于(B),行列式$=\left|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right|=-|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$;

对于(C),行列式$=\left|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right|=2|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$;

对于(D),行列式$=\left|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\right|=|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$.

则本题选(D).

方法 2　利用行列式的性质进行恒等变形.

(A) $\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-2c_1}|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,-3\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3|\xlongequal{c_3+3\boldsymbol{\xi}_2}|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,-\boldsymbol{\xi}_3|=-|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$;

(B) $\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$;

(C) $\xlongequal{c_1+c_2+c_3}2|\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3|\xlongequal{c_1-c_2}2|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_3|$

$\xlongequal{c_3-c_1}2|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3|\xlongequal{c_2-c_3}2|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$;

(D) $\xlongequal[c_2+c_3]{c_1-c_3}|-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_3|\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}|\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3|$.

则本题选(D).

【例 1.20】 设三阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{E}$为三阶单位矩阵,若$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$,则$|\boldsymbol{B}|=$________.

解析　这是 2003 年的真题,核心在于利用矩阵的性质化简等式,再利用行列式乘法性质求出结果.

先处理 $A^2B-A-B=E$,可得 $A^2B-B=A+E$,矩阵乘法和加法(减法)服从分配律有 $(A^2-E)B=A+E$ 分解得

$$(A+E)(A-E)B=A+E.$$

再利用行列式乘法性质,等式两边同时取行列式,得

$$|A+E||A-E||B|=|A+E|,$$

代入数据,并两边约去 $|A+E|$,得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} |B|=1,$$

则 $|B|=\dfrac{1}{2}$.

【例 1.21】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,$E$ 为二阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA=B+2E$,则 $|B|=$________.

解析 已知 $BA=B+2E$,可推出 $B(A-E)=2E$,代入 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,得

$$B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

等式两边同时取行列式,得

$$|B|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},$$

得 $|B|\times 2=4$,即 $|B|=2$.

魔研君点睛

例 1.20 和例 1.21 是考研中抽象型行列式求解考查的典型形式,一般它的题干条件组成为:(1)一个或几个矩阵抽象关系等式,如 $A+B=E$ 或者 $AB+ABC=D$;

(2)一个或几个具体数值条件,如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 或者 $|B|=1$.

这类题型的解题方法分两步:第一步是利用矩阵运算法则化简矩阵;第二步是两边同时取行列式来求得最终解.当然,这只是最基础的形式,还有很多种变体,如接下来的例 1.22 和例 1.23,但核心依然是矩阵的化简,魔研君希望大家多多做题,熟练掌握解题方法.

【例 1.22】 设 A,B 为三阶矩阵,且 $|A|=3$,$|B|=2$,$|A^{-1}+B|=2$,则 $|A+B^{-1}|=$________.

解析 此题是 2010 年数学二、数学三的一道真题.题干给出几个行列式.要求 $|A+B^{-1}|$.我们注意到 $A^{-1}+B$ 与 $A+B^{-1}$ 好像有些类似,能否想办法将它们联系起来呢?

因为 $(A+B^{-1})B=AB+E$,$A(A^{-1}+B)=AB+E$,则 $(A+B^{-1})B=A(A^{-1}+B)$,两边同时取行列式,得 $|A+B^{-1}||B|=|A||A^{-1}+B|$,则 $|A+B^{-1}|\times 2=3\times 2$,即 $|A+B^{-1}|=3$.

【例 1.23】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量,记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$,如果 $|A|=1$,那么 $|B|=$________.

解析 由题干我们试图把 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 建立联系，可以看到 $\boldsymbol{B}$ 是可以通过 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个矩阵得到的，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

则两边同时取行列式，得

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\text{（此为范德蒙德行列式）}$$
$$=(3-2)(3-1)(2-1)=2.$$

题型三：余子式相关问题

魔研君点睛

考研中有时会给出一个矩阵，求这个矩阵某一行或者某一列的代数余子式之和，下面举一个简单的三阶矩阵的例子来介绍一般的解题方法，即通过修改矩阵后求其行列式来解决代数余子式的加和问题.

比如已知三阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}$ 的值.

处理这个问题最笨的方法当然是根据代数余子式的定义一个个写出 A_{11}，A_{12} 和 A_{13}，这样做当然行得通，但我们往往不这么处理，联系行列式展开公式 $D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$，是不是可以将矩阵的第一行元素全都替换为 1 呢？从而得到 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$.

当然实际情况可能会遇到求 $A_{11}-A_{12}+5A_{13}$ 的问题，方法是一样的，将第一行 3 个元素分别替换为 $1,-1,5$ 即可.

魔研君提醒大家注意：余子式与代数余子式是不同的，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，千万不能搞混淆.

【例 1.24】 设 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\c&b&d&a\\d&b&c&a\\a&b&d&c\end{vmatrix}$，则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$________.

解析 观察发现 A_{13}，A_{23}，A_{33}，A_{43} 是第 3 列元素的代数余子式，则用系数替换第 3 列元素.

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix}a&b&1&d\\c&b&1&a\\d&b&1&a\\a&b&1&c\end{vmatrix},$$

由第 2,3 两列元素对应成比例,则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=0$.

【例 1.25】 已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$,求 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式之和.

解析 $\boldsymbol{A}^*$ 即是所有代数余子式所组成的方阵.

方法 1 尝试写出伴随矩阵,再求和.

因为 $|\boldsymbol{A}|=1$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵等于 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,我们只要通过初等变换法求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 即可,求得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,则 $\sum A_{ij}=1$.

方法 2 魔研君说过,一般代数余子式的加和问题可以转化为修改矩阵后求其行列式,但这里并不是求某一行元素的代数余子式加和,而是求所有元素的代数余子式之和,那就分 4 次计算.

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=|A|=1,$$

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=0.$$

同样地,$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$,则 $\sum A_{ij}=1$.

【例 1.26】 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$a_{11}=-1$,且对任意 $1\leqslant i,j\leqslant 3$ 都有代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解析 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$,要注意 A_{ij} 的下标排布与 a_{ij} 是相同的,根据条件 $A_{ij}=a_{ij}$,可以得出 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

因为 $a_{ij}=A_{ij}$,所以 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

两边同时取行列式,得

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|,$$

则 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|$,得 $|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|-1)=0$,即得到 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=1$.

这里注意,题干中还有一个条件没有用到:$a_{11}=-1$.

又联想到行列式的完全展开式,可得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1+a_{12}^2+a_{13}^2\geqslant 1,$$

则 $|\boldsymbol{A}|=1$.

魔研君点睛

在线性代数中,余子式一般与两个概念有直接联系:行列式的完全展开式和伴随矩阵,伴随矩阵会在第 2 章中作详细的介绍.所以同学们遇到余子式的题目,就向这两个方向去靠,例 1.26 就是一个很好的实例.同样地,例 1.27 也体现了这种思想.

【例 1.27】 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解析 因为 $a_{ij}+A_{ij}=0$，所以 $a_{ij}=-A_{ij}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$，则 $-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*$，即 $-|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2$.

由 $|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{A}|=0$，得 $|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|+1)=0$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，则必有元素不为 0，假设它在第 1 行，则按第 1 行展开，得 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

自测题精选

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 求行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a-1 & & \\ 1 & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a-1 \\ & & 1 & a \end{vmatrix}$.

5. 证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

6. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是四维列向量，且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=a$，$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=b$，则 $|2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=$________.

7. 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 都是四维列向量. $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________.

8. 已知五阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

自测题解题参考

1. 原式 $=d\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&2&a\\0&b&0\\c&4&5\end{vmatrix}$

$$=-d\cdot c\begin{vmatrix}2&a\\b&0\end{vmatrix}$$

$$=abcd.$$

2. 利用行列式分解.

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}a&b&c&1\\b&c&a&1\\c&a&b&1\\\frac{b}{2}&\frac{c}{2}&\frac{a}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b&c&1\\b&c&a&1\\c&a&b&1\\\frac{c}{2}&\frac{a}{2}&\frac{b}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0+0=0.$$

3. 利用“爪形行列式”求解方法.

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}4&3&2&1+2\times(-2)+3\times(-3)+4\times(-4)\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3&2&-28\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-28\times(-1)^{\frac{4\times3}{2}}=-28.$$

4. 按第 1 行展开,则

$$D_n=aD_{n-1}-(a-1)D_{n-2},$$

$$\begin{aligned}D_n-D_{n-1}&=(a-1)D_{n-1}-(a-1)D_{n-2}\\&=(a-1)(D_{n-1}-D_{n-2})\\&=(a-1)^2(D_{n-2}-D_{n-3}),\\&\vdots\\&=(a-1)^{n-2}(D_2-D_1).\end{aligned}$$

又 $$D_2=\begin{vmatrix}a&a-1\\1&a\end{vmatrix}=a^2-a+1,$$

$$D_1=a,$$

则 $$D_2-D_1=a^2-2a+1=(a-1)^2,$$

得 $$D_n-D_{n-1}=(a-1)^n,$$

则 $$\begin{aligned}D_n&=D_{n-1}+(a-1)^n\\&=D_{n-2}+(a-1)^{n-1}+(a-1)^n\\&\vdots\end{aligned}$$

$$= D_1 + (a-1)^2 + \cdots + (a-1)^n$$
$$= a + (a-1)^2 + \cdots + (a-1)^n.$$

又 $(a-1)^2+(a-1)^3+\cdots+(a-1)^n=\dfrac{(a-1)^2-(a-1)^{n+1}}{2-a}$，当 $a=2$ 时，$D_n=2+n-1=n+1$，则 $D_n=\begin{cases} n+1, & a=2, \\ \dfrac{(a-1)^2-(a-1)^{n+1}}{2-a}, & a\neq 2. \end{cases}$

5. 用数学归纳法.

(1) 当 $n=1$ 时，$D_1=\cos\alpha$，成立.

(2) 假设 $n\leqslant k$ 时，$D_n=\cos n\alpha$.

(3) 当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 } k+1 \text{ 行}} 2\cos\alpha\cdot D_k+(-1)^{k+1+k}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\alpha D_k - D_{k-1}$$
$$= 2\cos\alpha\cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha$$
$$= 2\cos\alpha\cos k\alpha - \cos\alpha\cos k\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha$$
$$= \cos\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha$$
$$= \cos(\alpha+k\alpha) = \cos(k+1)\alpha,$$

结论也成立. 证毕.

6. $|2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2(|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|-|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|)$.

又 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=a$，则 $|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-a$，$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=b\Rightarrow|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-b$，则 $|2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2(a-b)$.

7. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|$

$$=8|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|+8|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|$$
$$=8\times3+8\times2$$
$$=40.$$

8. $D\xlongequal{r_2+r_4}3\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&1&1\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27.$

按第 4 行展开,得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}+A_{45}=9.$$

又 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+2(A_{44}+A_{45})=27$,则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$,$A_{44}+A_{45}=18$.

第2章 矩阵

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质	数学一、二、三
2	掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质	数学一、二、三
3	理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵	数学一、二、三
4	理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法	数学一、二、三
5	了解分块矩阵及其运算	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

矩阵是线性代数的基石，可以说线性代数就是一门研究矩阵的各种性质并用它们来解决各种实际问题的学科. 谈到性质，首先需要知道矩阵是什么，它其实就是一个数表，来源于方程组的系数. 有了这么一个数表，我们当然想知道它怎么用来计算，包括矩阵的加法、减法和乘法. 以上都是对于一般矩阵而言的，对于特殊的 n 阶矩阵，还需要掌握它的可逆性，这里面又涉及伴随矩阵和初等变换. 而矩阵的秩，在本章里是通过余子式的方式定义的，但需要大家注意的是，在后面的向量章节中，它还有另外的定义方式，所以大家一定要以一个整体的方式来看待线性代数这门学科，才能更加融会贯通.

必会基本内容

一、矩阵相关概念

定义 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，记作 $(a_{ij})_{m\times n}$.

若有两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，它们的行数和列数都相同，那么称它们为同型矩阵.

几种特殊类型的矩阵：

(1) 当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵；

(2) 所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{0}$；

(3) 主对角线元素全为 1，其余元素都是 0 的矩阵称为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的转置

定义 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到一个新的矩阵，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

矩阵转置的运算满足如下规则：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

2. 矩阵的线性运算

(1) 矩阵加法

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

魔研君点睛

只有两个矩阵是同型矩阵时，才可以进行加法运算.

(2) 数与矩阵相乘

数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$，规定为

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的线性运算满足如下规则：

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

③ $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

3. 矩阵乘法

定义　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

记作

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}.$$

矩阵乘法满足如下规则：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$（其中 k 为任意常数）.

矩阵乘法并没有交换律，即 $\boldsymbol{AB}$ 不一定等于 $\boldsymbol{BA}$.

对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

魔研君点睛

令 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，矩阵的乘法遵循“左行右列”四个字，它有两个含义：(1)计算规则是左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行乘以右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列的加和；(2)得到的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列.

关于矩阵乘法不能交换，可理解为矩阵对应着一个线性变换，而 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 对应着两种相反的变换顺序. 可以形象地理解为鞋和袜子的关系：先套袜子再穿鞋和先穿鞋再套袜子得到的是两种完全不同的结果.

三、逆矩阵

1. 定义

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

魔研君点睛

理解逆矩阵的概念需要注意以下几点：

(1) 只有 n 阶方阵才能谈可逆.

比如 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，虽然它们相乘也得到 $\boldsymbol{E}$，但不能称左边的两个矩阵互为逆矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则必有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

(3) 如果一个矩阵存在逆矩阵，那它的逆矩阵是唯一的.

2. 矩阵可逆的充要条件

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆

$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的每个特征值都不为 0

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的列(行)向量线性无关

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = n$.

逆矩阵相关公式:

若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆,则

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

小试牛刀

【例 2.1】 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则 $r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})=$________.

解析 因为

$$\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}, \qquad ①$$

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$,则

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}. \qquad ②$$

①−②,得到

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA},$$

则 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}$. 又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $r(2\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=n$,故 $r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})=n$.

3. 伴随矩阵

定义 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,设 A_{ij} 是 a_{ij} 对应的代数余子式,若记

$$\boldsymbol{A}^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}}_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,且有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

伴随矩阵相关公式:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$;

(2) $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(4) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

(5) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(6) $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

(7) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$;

(8) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

魔研君点睛

考研中伴随矩阵相关题目需要牢记三点:

(1) 伴随矩阵的定义,一定注意下标与它相对应矩阵的下标是转置的关系.

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 上面所提到的公式(1)～(5),都可以用这个公式推出.

【例】 求证 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

【证明】 因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,所以 $|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{A}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n$.

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 不满秩,则由伴随矩阵秩的关系可知 $\boldsymbol{A}^*$ 也不满秩,则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$,同样满足 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 证毕.

(3) $r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 的关系:

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

考题一般会用到上面的一个或多个知识点.

四、初等变换、初等矩阵

1. 三种初等变换及其逆变换

序号	初 等 变 换	逆　变　换
1	对换 i,j 两行(列)	对换 i,j 两行(列)
2	以 k(k 不为 0)乘以第 i 行(列)	以 $\frac{1}{k}$ 乘以第 i 行(列)
3	将第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)	将第 i 行(列)的 $-k$ 倍加到第 j 行(列)

三种初等变换的符号表示:

(1) 对调 i,j 两行,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$;

(2) 以 k 乘以第 i 行,记作 kr_i;

(3) 将第 i 行的 k 倍加至第 j 行,记作 r_j+kr_i.

同理可定义初等列变换的符号(将 r 换成 c).

2. 等价矩阵

定义　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换得到 $\boldsymbol{B}$,就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

矩阵等价性质:

(1) 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

推论　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换可以得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

【应用】 初等行变换求逆.

对一个可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$,构造一个 $n*2n$ 的矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})$,对其进行初等行变换,当左部矩阵变为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 时,右部矩阵 $\boldsymbol{E}$ 则变成 $\boldsymbol{A}^{-1}$,即

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\rightarrow(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}).$$

小试牛刀

【例 2.2】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解析 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

3. 初等矩阵

定义 对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 进行一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有下列三种:$\boldsymbol{E}_{ij}$,$\boldsymbol{E}_{i(k)}$,$\boldsymbol{E}_{i,j(k)}$,分别对应着第一、二、三类初等变换,如 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$都是初等矩阵.

定理 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换等于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以一个相应的 m 阶初等矩阵;对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等列变换等于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以一个相应的 n 阶初等矩阵.

小试牛刀

【例 2.3】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&1\end{pmatrix}$,分别写出下列变换的表达式和结果.

(1) 对调 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 两行;

(2) ①先对调 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2 两行,②再将其第 3 行乘以 2;

(3) ①先将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 3 倍加至第 3 行，②再将第 2，3 两行对调.

解析　(1) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\3&2\\2&0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\2&3\end{pmatrix}$.

4. 行阶梯形矩阵和行最简形矩阵

行阶梯形矩阵：若非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足(1)非零行在零行的上面；(2)非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的后面，则称此矩阵为行阶梯形矩阵.

行最简形矩阵：如果 $\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵，并且还满足(1)非零行的首非零元为 1；(2)首非零元所在的列的其他元均为 0，则称 $\boldsymbol{A}$ 为行最简形矩阵.

魔研君点睛

对于任何非零矩阵，总可经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

小试牛刀

【例 2.4】 试用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}.$$

解析

$$\boldsymbol{B}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{r_3/2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-r_3\\r_3-2r_1}}{\underset{r_4-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2/2\\r_3+5r_2}}{\underset{r_4-3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\underset{r_4-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&-0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1,$$

$$\boldsymbol{B}_1\overset{r_1-r_2}{\underset{r_2-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2.$$

$\boldsymbol{B}_1$ 为行阶梯形矩阵，$\boldsymbol{B}_2$ 为行最简形矩阵.

五、矩阵的秩

定义 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列（k 小于等于 m,n），取位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式.

矩阵的秩相关公式：

(1) $0\leqslant r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant \min\{m,n\}$；

(2) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(k\boldsymbol{A})\,(k\neq 0)$；

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$；

(4) $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

(5) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

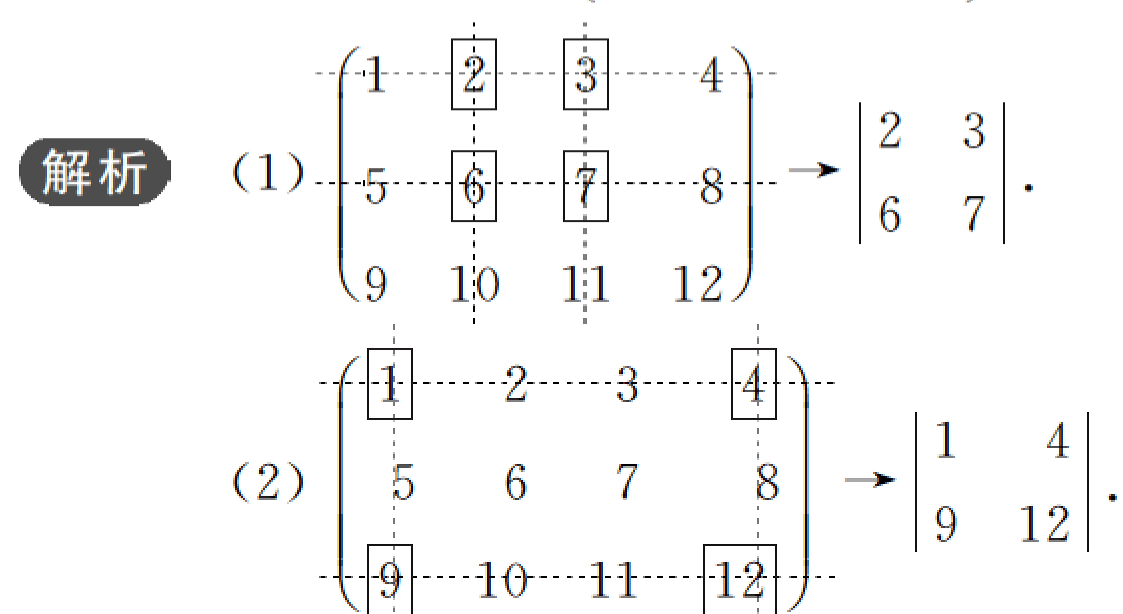
(6) $r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$；

(7) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

小试牛刀

【例 2.5】 试写出矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$ 的两个二阶子式.

解析



定义 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那么 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $r(\boldsymbol{A})$，并规定零矩阵的秩等于 0.

小试牛刀

【例 2.6】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$ 的秩.

解析 (1) 先看一阶子式，必然存在一阶子式不为 0，如 $|6|$.

(2) 再考虑二阶子式，选取 $\begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix}=6-10=-4\neq 0$，所以也存在二阶子式不为 0.

(3) $\boldsymbol{A}$ 一共有 4 个三阶子式：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\5&6&7\\9&10&11\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&2&4\\5&7&8\\9&11&12\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&3&4\\5&7&8\\9&11&12\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&3&4\\6&7&8\\10&11&12\end{vmatrix}.$$

它们都等于 0，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$.

魔研君点睛

例题的方法虽然很“笨重”，但是紧扣定义，请大家务必掌握. 那么，是不是仅有这一种方法呢？当然不是！我们知道，初等行变换可以将矩阵化为行最简形式，同时某行(列)所有元素都为 0 的行列式为 0. 想到这里，脑海中是不是有了一个模糊的想法，就是我们可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与秩 r 联系起来？如何把 $\boldsymbol{A}$ 与 r 联系起来呢？这就需要知道 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的联系.

定理　若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

初等变换不会改变矩阵的秩！也就是说，它提供了一种新的求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩的方法：(1)先将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换变成行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$；(2)$\boldsymbol{B}$ 的非零行的行数即是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

【例 2.7】　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$ 的秩.

解析

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\8&8&8&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 4]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的行数为 2，所以 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=2$.

六、分块矩阵

1. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1n}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{n1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1n}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{B}_{n1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{nn}\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 是同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1n}+\boldsymbol{B}_{1n}\\\vdots&&\\\boldsymbol{A}_{n1}+\boldsymbol{B}_{n1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}+\boldsymbol{B}_{nn}\end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{M}&\boldsymbol{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BM}&\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BN}\\\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DM}&\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DN}\end{pmatrix}$.

分块矩阵的乘法规则与一般数字矩阵一样，都是“左行右列相乘求和”，但是前提是必须满足每个涉及的子矩阵之间可以相乘，比如上面公式右边第一项的 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{M}$.

3. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

4. 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶，n 阶方阵，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{n}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{n}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} |A||B|,$$

$$\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & B \\ A & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & B \\ A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|.$$

考试题型与解析

题型一：矩阵的运算

魔研君点睛

矩阵运算需要熟练掌握矩阵运算法则、逆矩阵以及伴随矩阵的常用公式.

(1) 对于矩阵运算法则，需要注意矩阵乘法没有分配率，即 AB 不一定等于 BA，运算中切勿像一般数值计算那样随意改变矩阵符号位置.

(2) 逆矩阵与伴随矩阵的公式需要熟记，魔研君建议大家要会推导.

(3) 遇到计算量大的题目不要怕，如 2015 年数学二的一道真题，方法很基本，但是计算量大，很多同学算到一半算不下去了，非常可惜. 所以大家平时就要多“折磨”自己，做点难算的题.

【例 2.8】 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$. 其中 E 是三阶单位矩阵，求 X.

解析 此题需要先化简题干中的等式，再将数据代入进行计算.

因为 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，所以 $AX(A-B)=BX(A-B)+E$，移项得

$$(A-B)X(A-B)=E,$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\Rightarrow X = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

【例 2.9】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3=0$.

(1) 求 a 的值；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

解析　第(1)问需用到秩和行列式的关系，而不是把 $\boldsymbol{A}^3$ 硬生生求出来.

第(2)问就是一个典型的"道理我都懂，但我就是算不出来"的题.

(1) 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A})<3$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=0$，得 $a=0$.

(2) 因为 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$.

又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 都可逆，则

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

题型二：逆矩阵

类型一：数字型矩阵求逆

魔研君点睛

一般来说，求一个数字型矩阵的逆矩阵有两种方法：

(1) 伴随求逆法：利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，可以求出给定矩阵的行列式和伴随矩阵后，再求出其逆矩阵.

(2) 初等行变换法：具体方法为 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\xrightarrow{r}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1})$，这个方法需要注意的是，只能采用初等行变换，为什么呢？试想一下，如果对 $\boldsymbol{A}$ 进行列变换，那它右边的 $\boldsymbol{E}$ 永远都不能同时改变了，那这种方法肯定是不对的.

矩阵求逆有时会在客观题中直接考查，有时会在解题过程中体现，总之，它是考研线性代数的一个必考点，大家一定要掌握.

【例 2.10】　矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解析　方法 1　伴随求逆法.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{21}=-3,\quad A_{22}=1,\quad A_{23}=12,\quad A_{31}=3,\quad A_{32}=-1,\quad A_{33}=-13,$$

而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 12 & -13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & -12 & 13 \end{pmatrix}$.

方法 2　初等行变换法.

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&0&1&0&0\\5&2&1&0&1&0\\4&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-13&1&-5&1&0\\0&-12&1&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-1&0&-1&1&-1\\0&12&1&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&3&-3\\0&-1&0&-1&1&-1\\0&0&1&8&-12&13\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&3&-3\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&8&-12&13\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\1&-1&1\\8&-12&13\end{pmatrix}$.

魔研君点睛

上题是用初等行变换的方法来求逆.需要注意:(1)只能使用初等行变换;(2)第 1 章将行列式化三角形时,用到了高斯消元法,而求逆矩阵时只需再反向回代,消去矩阵的上三角元素即可.同时,高斯消元法也是下一章解线性方程组的核心方法.关于它,魔研君想多说两句,相信大家都知道 MATLAB 可以用来解线性方程组,所采用的方法就是高斯消元法.看,它是多么的重要!

类型二:抽象型矩阵求逆

【例 2.11】　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

解析　审题时看到问题要求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$,再看题目给的是一个 $\boldsymbol{A}$ 的多项式,自然而然,做题前先在草稿纸上尝试着用多项式凑出一个含有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 因式的乘式,则有

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E},$$

则

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E},$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E},$$

即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}).$$

【注】　此类考题一般是给出一个等式,如 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,要求某矩阵的逆矩阵,如求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$.解题方法是用原等式凑出 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的形式,则 $\boldsymbol{B}$ 即为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$,这里有 $-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

【例 2.12】　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$,则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　　　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解析 题目要判断 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的可逆性，那我们就用例 2.11 的方法，看能不能凑出 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 和 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$ 的式子，凑得出即可逆. 这里还考了大家两个公式：(1)$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$；(2)$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

(1) $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.

(2) $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，可知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 都可逆. 故选(C).

【例 2.13】 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，$a<0$；$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$________.

解析 由题目知 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，这其中包含了两方面的信息：

(1) $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵；

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

所以，结合其他条件，从这两方面入手来计算.

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$.

注意到 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶矩阵，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数，又因为矩阵乘法有结合律，所以

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+\left(\frac{1}{a}-1\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2a^2$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+\left(\frac{1}{a}-1\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-a\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，即 $\left(\frac{1}{a}-1-2a\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=0$.

又 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 必为非零矩阵，而上式又是数字与矩阵相乘，则必有

$$\frac{1}{a}-1-2a=0,$$

则 $a=\frac{1}{2}$ 或 -1. 因为 $a<0$，所以 $a=-1$.

题型三：伴随矩阵

魔研君点睛

伴随矩阵的题目其实很简单，变来变去都离不开这三点：

(1) 伴随矩阵的定义式：$\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

(3) 伴随矩阵秩的公式：$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

【例 2.14】 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，$a,b\neq0$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有(　　).

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

解析 伴随矩阵的秩的公式：

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1,\end{cases}$$

因为 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则 $r(\boldsymbol{A})=n-1=2$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而

$$\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1&0&0\\b&a-b&0\\b&0&a-b\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2=0,$$

即 $a=-2b$ 或 $a=b$.

又当 $a=b$ 时，显然 $r(\boldsymbol{A})=1$，故 $a\neq b$.

而当 $a+2b=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，则 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$. 故选(D).

【例 2.15】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则(　　).

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$

解析 此题是 2005 年考研数学一的真题，将伴随矩阵与初等变换结合起来. 做题方法为先将题中的条件用数学符号表示出来，再推导出正确答案.

将条件数学化，得 $\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^*&=(\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A})^*=|\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}|\cdot(\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A})^{-1}\\&=|\boldsymbol{E}_{12}|\cdot|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}_{12}^{-1}\\&=-\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{E}_{12}\end{aligned}$$

得 $-\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}^*$，含义为交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1，2 两行得到 $-\boldsymbol{B}^*$. 故选(D).

【例 2.16】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$________.

解析 与例 2.15 一样，这道题也将伴随矩阵与初等变换结合起来. 同样地，先数学化题条件，再进行化简.

由条件可知

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|,$$
$$\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

则两边同时取行列式，得

$$-|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$

则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|^2=-|\boldsymbol{A}|^3=-27$.

【例 2.17】 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为二阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

解析 分块矩阵同样满足公式 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，则 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix}\boldsymbol{E}$，则

$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| =$
$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \\ |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \\ |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. 故选(B).

【例 2.18】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为 3 个相等的正数，则 a_{11} 为(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

解析 此题综合运用了伴随矩阵的秩、完全展开式以及行列式相关知识，是一道难度系数很高的题.

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $a_{ij} = A_{ij}$.

又由行列式的完全展开式得

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a_{11}^2.$$

而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=1$.

因为 $|\boldsymbol{A}| = 3a_{11}^2 > 0$，所以 $|\boldsymbol{A}| = 1 = 3a_{11}^2$，即 $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选(A).

魔研君点睛

类似题目在第 1 章例 1.26～例 1.27 中也有提到，注意到这道题给的条件是 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，可以推出 $a_{ij} = A_{ij}$，而例 1.26 的条件为 $a_{ij} = A_{ij}$，例 1.27 的条件是 $a_{ij} + A_{ij} = 0$，它们是极相似的，思维方法也是相同的.

题型四：初等变换

魔研君点睛

线性方程组是整个线性代数研究的核心，而初等变换是研究方程组的核心方法，因此，熟练掌握初等变换的重要性不言而喻. 为了方便理解，魔研君为大家作了如下总结：

(1) 每个初等变换都对应着一个初等矩阵，左乘初等矩阵是作行变换，而右乘则是作列变换.

(2) 三种初等矩阵的行列式为 $|\boldsymbol{E}_{ij}| = -1$，$|\boldsymbol{E}_{ki}| = k$，$|\boldsymbol{E}_{i+kj}| = 1$.

【例 2.19】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有(　　).

(A) 当 $|\boldsymbol{A}| = a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}| = a$　　(B) 当 $|\boldsymbol{A}| = a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}| = -a$

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$　　　　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$

解析 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 经过初等变换可变为 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 经过初等变换可变为 $\boldsymbol{A}$.

初等变换有 3 种：$\begin{cases}(1)\ \text{交换两行(列)}, \\ (2)\ \text{将某一行(列)乘一个系数 } k, \\ (3)\ \text{将某一行(列)的 } k \text{ 倍加到另一行(列)},\end{cases}$ 而对于每种初等变换，

行列式变化情况为 $\begin{cases}(1)\ |\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|, \\ (2)\ |\boldsymbol{B}|=k|\boldsymbol{A}|, \\ (3)\ |\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|.\end{cases}$

针对此题，可以理解为初等变换前后矩阵的行列式成比例，即对于等价矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，有 $|\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{B}|(k\neq 0)$. 故选(D).

【例 2.20】 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析 由题意可知

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

则 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 故选(D).

【例 2.21】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$(　　).

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$

(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

解析 题干数学化，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}, \\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},\end{cases}$$

则 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$. 故选(D).

【例 2.22】 设 A 为三阶矩阵,P 为三阶可逆矩阵,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $Q^{-1}AQ=$(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析 题干数学化,因为 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$,于是

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故本题选(B).

魔研君点睛

解初等变换题目的步骤是先将题干的条件用数学形式表达出来,再将问题写出来,最后通过矩阵计算的各种性质,从初始条件推出题目要求的值,以上几题就是这个方法最好的例子.很多时候,我们会在脑子里各种构思这个矩阵要怎么变,但其实写出来,老老实实地计算才是最聪明的办法.

【例 2.23】 设 A,B,C 为 n 阶矩阵,满足 $A=BC$,要保持等式成立,则(　　).

(A) 将 A 的第 i 列与第 j 列对换后,应将 B 的第 i 列与第 j 列对换

(B) 将 A 的第 i 列与第 j 列对换后,应将 C 的第 i 行与第 j 行对换

(C) 将 B 的第 i 列与第 j 列对换后,应将 C 的第 i 列与第 j 列对换

(D) 将 B 的第 i 列与第 j 列对换后,应将 C 的第 i 行与第 j 行对换

解析 分别数学化 4 个选项.

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,则有

(A):$\boldsymbol{AE}_{ij}=(\boldsymbol{BE}_{ij})\boldsymbol{C}$;

(B):$\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{C})$;

(C):$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BE}_{ij}\boldsymbol{CE}_{ij}$;

(D):$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{BE}_{ij})(\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{C})$.

可以看出,(D)选项可化为原题干条件 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$. 因为 $\boldsymbol{E}_{ij}\cdot\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{E}$,所以是正确选项. 故选(D).

魔研君点睛

此题需要掌握三点:

(1) 矩阵乘法不存在交换律;

(2) 初等矩阵存在"左行右列"的性质:乘在左,作行变换;乘在右,作列变换;

(3) 第一类初等矩阵的逆矩阵是它自身.

题型五:矩阵的秩

魔研君点睛

矩阵的秩是一个神奇的数字,只需要知道一个数字,就能洞悉矩阵的很多性质. 对于秩,同学们从以下几点来理解掌握:

(1) 秩是矩阵不为零的最高阶子式的阶数,这个性质可以运用于证明题中;

(2) 对于方阵,满秩则意味着它的行列式不为 0,不满秩意味着它的行列式为 0,意味着用秩可以将矩阵和行列式联系起来;

(3) 矩阵秩的不等式是遇到不止一个矩阵运算时的判别利器;

(4) 后面的章节中还会详细讲解向量组的秩,其本质和矩阵的秩是相同的.

【例 2.24】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

解析 此题 $\boldsymbol{A}$ 中 0 元素较多,可直接用矩阵乘法计算出 $\boldsymbol{A}^3$ 后,观察得出 $r(\boldsymbol{A}^3)$.

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A}^3)=1$.

【例 2.25】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$________.

解析　我们观察到，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个四阶矩阵，而 $r(\boldsymbol{A})=3$，即 $\boldsymbol{A}$ 非满秩，也即 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，那么 $|\boldsymbol{A}|=0$. 需要注意的是，$r(\boldsymbol{A})=3 \Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0$，而 $|\boldsymbol{A}|=0$ 推不出 $r(\boldsymbol{A})=3$. 因此，求出的 k 值需要代回检验.

因为 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=0$. 而

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} k+3 & k+3 & k+3 & k+3 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3=0,$$

则 $k=-3$ 或 $k=1$.

代入 $\boldsymbol{A}$ 检验：当 $k=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，不符合；当 $k=-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=3$，符合，故 $k=-3$.

【例 2.26】 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的转置，证明：秩 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.

证明　这是 2008 年的一道真题，题干给了一个 $\boldsymbol{A}$ 的关系式，要证明 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$，自然就想到这是在考查秩的不等式.

因为 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})$.

又 $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$，则 $r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{\alpha}), r(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量. 所以 $r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{\alpha}), r(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\} \leqslant 1$.

同理 $r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1$，则 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 2$.

证毕.

魔研君点睛

题目中出现了 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，关于它，魔研君有几句话要说.

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 n 阶非零列向量，则

(1) $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 n 阶矩阵，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0$；

(2) $r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=1$.

【例 2.27】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则(　　).

(A) $r(\boldsymbol{A})=m, r(\boldsymbol{B})=m$

(B) $r(\boldsymbol{A})=m, r(\boldsymbol{B})=n$

(C) $r(\boldsymbol{A})=n, r(\boldsymbol{B})=m$

(D) $r(\boldsymbol{A})=n, r(\boldsymbol{B})=n$

解析 因为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\cdot\boldsymbol{B}_{n\times m}=\boldsymbol{E}_{m\times m}$，所以 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{E}_{m\times m})=m\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

(1) 若 $m>n$，则有 $r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，则 $m\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant n$，矛盾.

(2) 若 $m\leqslant n$，则有 $r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\leqslant m$，则 $m\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant m$，即 $\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}=m$. 又 $r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\leqslant m$，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=m$. 故选(A).

【注】 通过这个题目我们可以发现，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 并不能说明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是方阵，但是却必须要满足秩的关系.

【例 2.28】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为五阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. 则(　　).

(A) 若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则必有 $r(\boldsymbol{B})=4$　　(B) 若 $r(\boldsymbol{A})=2$，则必有 $r(\boldsymbol{B})=3$

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则必有 $r(\boldsymbol{B})=2$　　(D) 若 $r(\boldsymbol{A})=4$，则必有 $r(\boldsymbol{B})=1$

解析 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 5$. 又 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$. 故选(D).

【注】 一般来说，题干中出现 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则要从两方面思考：

(1) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，从秩的角度；

(2) 从方程组角度，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 推出 $\boldsymbol{B}$ 的所有列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

【例 2.29】 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

证明 这是要证明伴随矩阵秩的公式，需要按条件中的三点一一证明.

$$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

(1) $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$r(\boldsymbol{A}^*)=n$.

(2) $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，存在 $n-1$ 阶子式不为 0，不妨令其为 A_{11}，则 $r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\Rightarrow r(\boldsymbol{A}^*)+r(\boldsymbol{A})\leqslant n$.

因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(3) $r(\boldsymbol{A})<n-1$ 时，说明 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $n-1$ 阶子式都为 0，则 $A_{ij}=0$，$(A_{ij})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$. 证毕.

【例 2.30】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，证明：$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明 现在只有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 这一个条件，问题中出现了 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，自然而然就要想到将 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 进行变形.

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$.

(此时只证明了等式的一半，需要再证明 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant n$.)

又 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$，则 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(2\boldsymbol{A})$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant r(2\boldsymbol{A})=n$，即 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$. 证毕.

题型六：分块矩阵

魔研君点睛

分块矩阵的题目一般都不会特别难，但是对考生的计算能力有一定的要求．魔研君希望大家记住，涉及分块矩阵的运算，只要它可以运算，那它的运算法则就与一般矩阵运算一样．

【例 2.31】 设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶、n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵，计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$．

解析

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ (-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\\ (-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\\ (-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ (-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & (-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

【例 2.32】 求矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{U}_{k\times l}\\ \boldsymbol{0}_{l\times k} & \boldsymbol{E}_l\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中，$\boldsymbol{E}_k,\boldsymbol{E}_l$ 分别是 k 阶、l 阶单位矩阵，$\boldsymbol{U}$ 为任意的 $k\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{0}$ 为 $l\times k$ 零矩阵．

解析 令 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$．

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{B}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{U},\\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{E},\end{cases}\text{则}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{U}_{k\times l}\\ \boldsymbol{0}_{l\times k} & \boldsymbol{E}_l\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & -\boldsymbol{U}_{k\times l}\\ \boldsymbol{0}_{l\times k} & \boldsymbol{E}_l\end{pmatrix}.$$

自测题精选

1\. 计算 $\begin{pmatrix}\frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n}\end{pmatrix}^2$．

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

3. 证明：如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$. 那么 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）.

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&6&x\\3&0&-6\end{pmatrix}$，三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则（　　）.

(A) $x=-8, r(\boldsymbol{B})=1$　　(B) $x=-8, r(\boldsymbol{B})=2$

(C) $x=8, r(\boldsymbol{B})=1$　　(D) $x=8, r(\boldsymbol{B})=2$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

自测题解题参考

1. 原式 $=\left[\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}\right]^2=\dfrac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}^2$

$$=\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix} n(n-1) & -n & \cdots & -n \\ -n & n(n-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -n \\ -n & \cdots & -n & n(n-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}.$$

魔研君点睛

可以看出，这道题中 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，这样的矩阵称作**幂等矩阵**.

2. 因为 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=-3\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{-3}\right)=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=-\dfrac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{3}$.

3. 因为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

又 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}+(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

4. 因为 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{E}|=1$.

又 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=9$，则 $1\times|\boldsymbol{B}|\times 9=1$，即 $|\boldsymbol{B}|=\dfrac{1}{9}$.

5. 将题干数学化，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

则 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$.

因为 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{PAP}^{-1}=\boldsymbol{C}$. 故选(B).

6．因为 $\boldsymbol{A}$ 中存在二阶子式 $\begin{vmatrix}1&-2\\3&0\end{vmatrix}\neq0$，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant2$.

又 $r(\boldsymbol{B})\geqslant1$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant3$，即 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{B})=1$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $x=-8$. 故选(A).

7．因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$.

又 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E})=n$，即 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

8．将 $\boldsymbol{A}$ 分块，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{N}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}^n&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{N}^n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{M}^n$.

因为 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{M}^n=(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})^n=(2\boldsymbol{E})^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{P}\cdot(2\boldsymbol{E})^{n-1}=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$.

(2) 求 $\boldsymbol{N}^n$.

因为 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}(1\quad3)$，所以

$$\boldsymbol{N}^n=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\left[(1\quad3)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]^{n-1}(1\quad3)=6^{n-1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}(1\quad3)=6^{n-1}\begin{pmatrix}3&9\\1&3\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^n&n\cdot2^{n-1}&0&0\\0&2^n&0&0\\0&0&3\times6^{n-1}&9\times6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\times6^{n-1}\end{pmatrix}.$$

第 3 章 向量

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念	数学一、二、三
2	理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法	数学一、二、三
3	理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩	数学一、二、三
4	理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系	数学一、二、三
5	了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念	数学一
6	了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵	数学一
7	了解规范正交基的概念及其性质	数学一

2. 本章概要与重点导学

向量作为本书的核心内容，是考研线性代数考点中比较抽象的部分，更是考研的重点考查内容. 建议大家在复习过程中，把握好向量有关基本概念的同时理清三对概念之间的关系，分别是“线性相关性和齐次线性方程组、线性表示和非齐次线性方程组、向量组间表示和矩阵方程”，这是线性代数的一大核心脉络.

【注】 基于考研数学的系统化学习要求，施密特正交化这部分内容将在第 5 章具体介绍.

必会基本内容

一、n 维向量相关概念及其运算

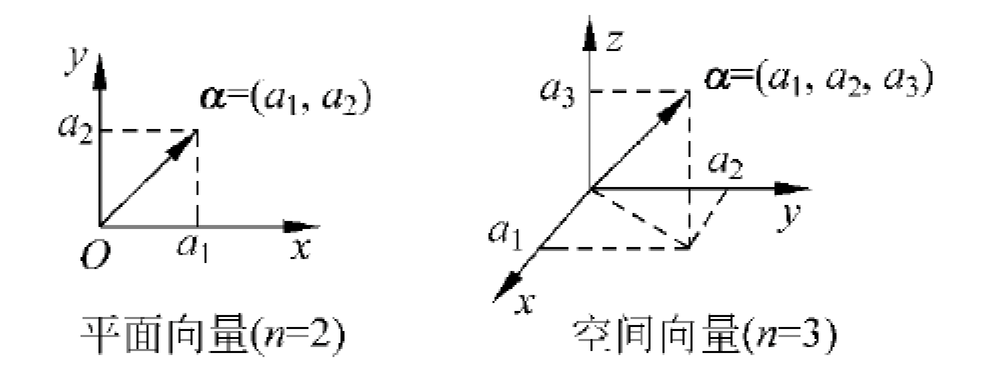
1. 什么是 n 维向量？

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组称为 n 维向量，记作

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n] \quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}.$$

前者称为行向量，后者称为列向量. 其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量，n 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的维数. 所有分量均为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}=[0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$.

特殊地，当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，就是平面向量和空间向量，相应的分量就是在笛卡儿坐标系下的坐标，如下图所示. 但是，当 $n>3$ 时，就无法从几何上进行描述了.



2. n 维向量怎样运算?

向量属于特殊的矩阵，所以向量具备矩阵的很多运算性质.

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$，则有下表.

运算形式	方　　法
数乘运算	$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}$
加减运算	$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=[a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n]^{\mathrm{T}}$
内积运算	(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$； (2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=a_1^2+\cdots+a_n^2\geqslant 0$；$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$； (3) 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交
长度运算	(1) $\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$； (2) 若 $\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert=1$，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量； (3) 单位化：$\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert}$

小试牛刀

【例 3.1】 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,5]^{\mathrm{T}}$，求：(1) $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，并将 $\boldsymbol{\beta}$ 进行单位化；(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$，$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$.

解析 (1) $\boldsymbol{\beta}=[0,1,3]^{\mathrm{T}}+[1,0,0]^{\mathrm{T}}-2[0,0,5]^{\mathrm{T}}=[1,1,-7]^{\mathrm{T}}$，且 $\lvert\boldsymbol{\beta}\rvert=\sqrt{1+1+49}=\sqrt{51}$，则 $\boldsymbol{\beta}^0=\dfrac{1}{\lvert\boldsymbol{\beta}\rvert}\boldsymbol{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{51}}[1,1,-7]^{\mathrm{T}}$.

(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=-20$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$，$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=-35$.

魔研君点睛

在这里讲解一个与内积相关联的一个重要考点，去辨别两对经常在考题中出现的符号“$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.”

以三维向量为例，设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}$ 为三维非零列向量，则由矩阵乘法知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{pmatrix}.$$

由上面计算所得结果可得到以下重要结论：

(1) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为一个数，且它们彼此相等，都等于 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 都为矩阵，且 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，除此之外 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1$.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的迹等于 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

【例 3.2】 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ ________.

解析 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为秩为 1 的矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=3$.

二、一个向量组间的向量关系——线性相关和线性无关

线性相关性描述的是一个向量组中向量之间的关系，若干个同维数的向量组成的集合就称为向量组.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一组 n 维向量，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；如果仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

根据定义，可以讨论向量组的线性相关性. 比如下面这两个向量组：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[2,3,0]^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,-1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,3]^{\mathrm{T}}$.

对于(1)，很容易建立等式：

$$-3[0,1,0]^{\mathrm{T}}+(-2)[1,0,0]^{\mathrm{T}}+0[0,0,1]^{\mathrm{T}}+[2,3,0]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0},$$

即 $-3\boldsymbol{\alpha}_1+(-2)\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，则存在一组不全为零的系数，使得等式成立，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性相关的. 并且会发现，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都可由其余向量线性表示，但是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 却不可由其余向量线性表示.

对于(2)，若令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1[0,-1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[2,0,0]^{\mathrm{T}}+k_3[0,0,3]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad [2k_2,-k_1,3k_3]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0},$$

则有 $2k_2=0,-k_1=0,3k_3=0$，即 $k_1=k_2=k_3=0$. 从定义讲，就是若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，当且仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时成立，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的.

魔研君点睛

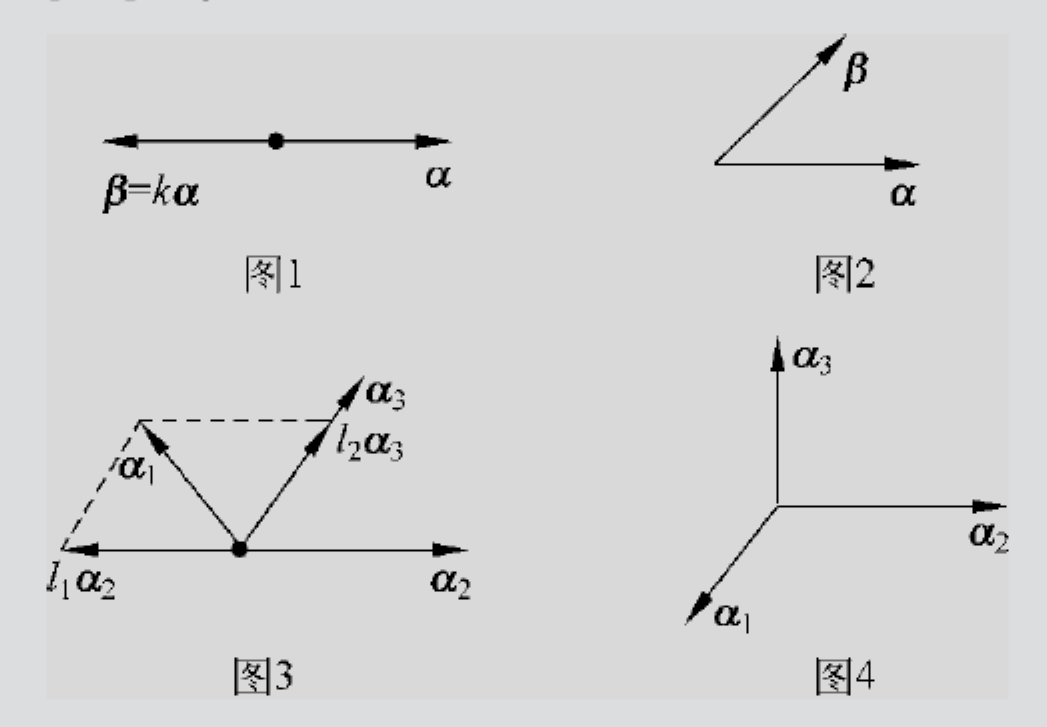
1. 线性相关性的核心在于 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立时的条件，如果存在(重点在于是“存在”，并不是“任意”)不全为零的系数使得其成立，则该向量组中的向量线性相关；如果只有(重点在于“只有”)当所有系数为零时，才会有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立，则该向量组中的向量线性无关.

2. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关⇔至少有一个向量可以由其余向量线性表示；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关⇔任何向量都不可以由其余向量线性表示.

3. (1) 向量组仅含一个向量时，若$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则称$\boldsymbol{\alpha}$线性相关；若$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}$线性无关(几何意义：是否是个点)；

(2) 向量组含有两个向量时，若两向量成比例，即$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，则$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关(图 1)；若$\boldsymbol{\beta}\neq k\boldsymbol{\alpha}$，则$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性无关(图 2)(几何意义：是否共线)；

(3) 向量组含有三个向量时，若$\boldsymbol{\alpha}_1=l_1\boldsymbol{\alpha}_2+l_2\boldsymbol{\alpha}_3$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关(图 3)；若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不可互相表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关(图 4)(几何意义：是否共面).



4. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$也线性相关；若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任意多个也线性无关(部分相关，整体相关；整体无关，部分也无关).

5. 当一个向量组中向量的个数大于该向量组中向量的维数时，该向量组线性相关.

小试牛刀

【例 3.3】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，则下列叙述正确的是(　　).

(A) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示

(B) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(C) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

(D) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

解析 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则至少有一个向量可由其余向量线性表示，但不能确定刚好为$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 例如$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,0]^{\mathrm{T}}$，由于含有零向量的向量组必线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，但$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可由$\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示，则(A)选项不正确；同理，“$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可由$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示”不可推出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，(B)也错误.

(C)选项等价于：若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 成立，当且仅当满足 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为0，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故(C)为正确选项.

(D)选项紧扣定义，不是“任意”，而是“存在”.

故选(C).

三、一个向量和一个向量组间的关系——线性表示

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 m 维向量，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是组常数，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个**线性组合**.

对于向量$\boldsymbol{\beta}$，若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

则称$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

魔研君点睛

1. 线性表示的核心在于使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 成立的 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是否存在，只要存在即可，或者换句通俗的话就是上面的式子能否被写出来.

2. 零向量可以由任何一个向量组表示，数学表达式为

$$\boldsymbol{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n.$$

一个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任意一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由该向量组表示，数学表达式为

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_i+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_{i+2}+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n.$$

四、向量组和向量组的关系——向量组表示

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中每一个向量均可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 表示，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 表示.

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可相互表示，则称为两个向量组等价.

魔研君点睛

1. 一个向量组被另一个向量组表示的问题可以转化为多个“单一向量被向量组线性表示”的问题，从而拓展出很多性质以及考研重点，详细见考试题型与解析中的题型三部分.

2. 向量组等价和矩阵等价是两个不同的问题，在根本的定义上就不相同，因此在题目的求解过程中要详加区别.

五、极大线性无关组和向量组的秩

设$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的部分向量所组成的向量组，且满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$线性无关；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任何一个向量可由$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$线性表示，

则称$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组，且极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r$.

魔研君点睛

1. 从极大线性无关组的定义中可知，若向量组中向量个数为 n，则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 线性无关；}$$

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 线性相关.}$$

2. $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行向量组的秩)$=\boldsymbol{A}$ 的列秩(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的秩).

由此可方便求出向量组的秩,例如有一个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,4]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,2]^{\mathrm{T}}$,要求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩就可以将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 放在一起组成矩阵 $\boldsymbol{A}$,求出 $\boldsymbol{A}$ 的秩即为向量组的秩,则

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\2&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$.

3. 向量组的极大线性无关组是不唯一的,但是极大线性无关组的个数总是一样.

六、向量空间(数学一)

1. 向量空间概念

全体 n 维实数向量的集合,并满足加法和数乘两种线性运算,称为 n 维向量空间,记为 $\mathbf{R}^n$.

$\mathbf{R}^n$ 的非空子集 V 称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间,若满足

(1) 当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 时,$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$;

(2) 当$\boldsymbol{\alpha}\in V$,$k\in\mathbf{R}$ 时,$k\boldsymbol{\alpha}\in V$,

则称子空间 V 对线性运算封闭.

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,则 $L=\{\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbf{R}\}$ 叫做由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 所生成的向量空间.

设有向量空间 V_1 和 V_2,若 $V_1\subset V_2$,则称 V_1 是 V_2 的子空间.

2. 基、维数、坐标

若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个线性无关的向量组,且任一向量$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 均可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一组**基**,基向量的个数 n 称为向量空间的**维数**.

魔研君点睛

若将 $\mathbf{R}^n$ 中所有向量看成一个向量组,则向量空间的基就可以看成这个向量组的极大线性无关组.同理也可以找到子空间的基.

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基,则 V 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

其中系数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

例如向量组 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,$\cdots$,$\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基,对任一 n 维向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,有

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n.$$

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 V 的一个基，如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V 的一个规范正交基. 对任一 $\boldsymbol{x}\in V$，有

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,\quad \text{其中 } k_i=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_i),i=1,2,\cdots,r.$$

3. 过渡矩阵、坐标变换公式

以三维空间为例，设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个旧基，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个新基，并设

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}\qquad\text{(基变换公式)},$$

则称 $\boldsymbol{P}$ 为从旧基到新基的过渡矩阵，有

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3].$$

设向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 在旧基和新基下的坐标分别为 y_1,y_2,y_3 和 z_1,z_2,z_3，即

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix},$$

则 $\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]^{-1}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，称为从旧坐标到新坐标的坐标变换公式.

考试题型与解析

题型一：向量组线性相关性

魔研君点睛

涉及向量组线性相关性的证明或计算问题，主要从“线性相关性定义”“齐次线性方程组的解”以及“矩阵及向量组的秩”三个角度出发，搭建三者联系，从而将三个问题通过分析转化为一个问题.

对于 n 个 m 维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，有如下对应关系：

线性相关定义式： $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ （形式一）

⇕ 转化

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\mathbf{0}\qquad\text{(形式二)}$$

⇕ 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{x}=[k_1,k_2,\cdots,k_n]^{\mathrm{T}}$

齐次线性方程组： $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ （形式三）

（形式一与形式三之间以双向箭头相连）

从以上三种形式可以看出，有关向量组线性相关性的问题可以与齐次线性方程组的解挂钩. 按照 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$是否为方阵分成两类问题详解.

类型一：**A** 为一般阵（向量组由 n 个 m 维向量组成）

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性相关性问题

线性相关

若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$成立，则$k_1, k_2, \cdots, k_n$中至少有一个不为0

$\Updownarrow$

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$有非零解

$\Updownarrow$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)<n$

线性无关

只有$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$才成立

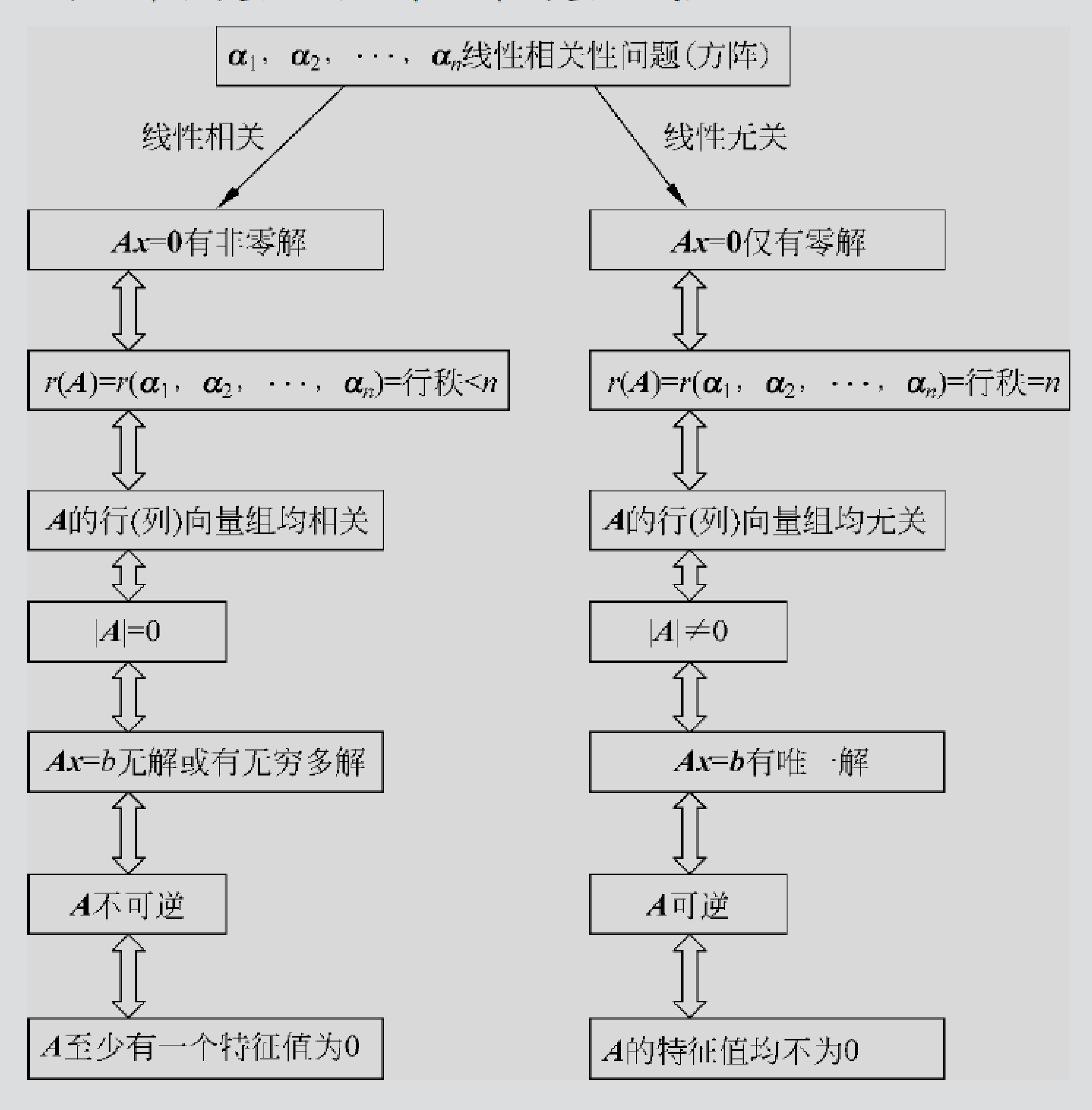
$\Updownarrow$

$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$仅有零解

$\Updownarrow$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)=n$

类型二：**A** 为方阵（向量组由 n 个 n 维向量组成）



考题一：数值型向量组线性相关性考题

魔研君点睛

数值型向量组线性相关性问题特点是各个向量分量已知，或含有待定参量，此类问题往往可以从“秩”和“行列式”两个角度进行处理．但要注意的是，首先要看 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$是否为方阵，只有方阵才可求行列式．

【例 3.4】 若向量$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,-t,-2t]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,6,0]^{\mathrm{T}}$线性相关，则 $t=$________.

解析　由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则有$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，故

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&-1\\2&-t&6\\-2&-2t&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&-t-2&4\\0&1-t&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&2-t\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则$t=2$.

【例 3.5】　设$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,3,t]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求t为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关？

(2) 求t为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关；且除极大无关组外，剩余向量用极大无关组表示出来.

解析　记$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$为方阵.

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\text{ 线性相关}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\text{ 线性无关}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0,$$

则两种思路从行列式或秩入手均可.

方法 1　$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&t-3\end{pmatrix}$，可知当$t=3$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，当$t\neq3$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

当$t=3$时，知

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个极大无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

方法 2　$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&t\end{vmatrix}=t-3$，可知当$t=3$时，$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，当$t\neq3$时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，极大无关组求解同方法 1.

考题二：抽象型向量组线性相关性考题

魔研君点睛

抽象型向量组指向量组中各向量分量未知. 此类问题通常从“定义”“向量组的秩”及“齐次线性方程组的解”三个方面处理.

方法 1　设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，进行恒等变形，看式子成立的$k_i$的情况.

方法 2　$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n\Leftrightarrow$线性无关，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n\Leftrightarrow$线性相关.

方法 3　令$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 只有零解}\Leftrightarrow\text{线性无关},$$
$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 有非零解}\Leftrightarrow\text{线性相关}.$$

【例 3.6】 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

解析　首先,由题设可得

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

可见(A),(B),(D)均线性相关,则选(C).

单独看(C)选项,从两种方法证明其线性无关.

方法 1　用定义.

设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+k_4(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,得$(k_1-k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则

$$\begin{cases} k_1-k_4=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0, \\ k_3+k_4=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0,$$

则向量组线性无关.

方法 2　用秩.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$,则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4$,故向量组线性无关.

【例 3.7】 设$\boldsymbol{\beta}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系,证明:

(1) $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明　(1) 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k_{s+1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}, \qquad ①$$

两边右乘上 $\boldsymbol{A}$ 矩阵,则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s+k_{s+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}, \qquad ②$$

则 $k_{s+1}\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0}$，则 $k_{s+1}\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，故 $k_{s+1}=0$. 回代入①中，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 设

$$k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s)+k_{s+1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \quad ③$$

$$\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+(k_1+k_2+\cdots+k_{s+1})\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}. \quad ④$$

两边同时右乘以 $\boldsymbol{A}$，则

$$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\alpha}_s+(k_1+\cdots+k_{s+1})\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0},$$

化简得 $(k_1+k_2+\cdots+k_s+k_{s+1})\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，则 $k_1+k_2+\cdots+k_{s+1}=0$. 回代入④，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

同(1)中方法，则 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，故 $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 证毕.

【例 3.8】 设向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示为

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为 $n\times n$ 矩阵，且向量组 A 线性无关，证明：向量组 B 线性无关的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{C})=n$.

证明 记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$.

(1) 必要性(秩).

由于 $\boldsymbol{B}$ 向量组线性无关，则 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=n$，则

$$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})\leqslant r(\boldsymbol{C})\Rightarrow r(\boldsymbol{C})\geqslant n. \quad ①$$

又因为 $\boldsymbol{C}$ 为 $n\times n$ 矩阵，

$$r(\boldsymbol{C})\leqslant n, \quad ②$$

所以由①、②知 $r(\boldsymbol{C})=n$.

(2) 充分性.

方法 1　用秩.

由于 $r(\boldsymbol{C})=n$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故

$$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})=r(\boldsymbol{A}).$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n,$$

则 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=n$，则 $\boldsymbol{B}$ 向量组线性无关.

方法 2　用方程组.

设 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$，则可知 $\boldsymbol{ACx}=\mathbf{0}$. 令 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{\beta}$，则有

$$\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0}.$$

由于

$$\boldsymbol{A}\text{ 的列向量线性无关}\Rightarrow\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$

即 $\boldsymbol{ACx}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，于是有 $\boldsymbol{Cx}=\mathbf{0}$. 已知 $r(\boldsymbol{C})=n$，可推出 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即当 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关. 证毕.

【例 3.9】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

证明 方法 1　用定义.

记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$，则设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\mathbf{0}$，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

可知 $\boldsymbol{AB}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow \boldsymbol{E}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，即 $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

方法 2　用秩.

$$n=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant n,$$

则 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=n$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

方法 3　用方程组.

设 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则有 $\boldsymbol{Ex}=\mathbf{0}$. 而 $r(\boldsymbol{E})=n$，则 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关. 证毕.

魔研君点睛

比较而言，明显方法 2 更简单直接. 当遇到线性相关性证明题时，能用秩就用秩，并且矩阵秩的相关公式一定要熟练.

【例 3.10】 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\,(t>2)$ 线性无关，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{t-1},$$

证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.

解析　方法 1　用定义.

设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，则

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_t)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{t-1})=\mathbf{0},$$

即 $(k_2+k_3+\cdots+k_t)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_3+\cdots+k_t)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_1+\cdots+k_{t-1})\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关，则有

$$\begin{cases}k_2+k_3+\cdots+k_t=0,\\k_1+k_3+\cdots+k_t=0,\\\vdots\\k_1+k_2+\cdots+k_{t-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_t\end{pmatrix}=0.\qquad①$$

其中

$$\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

$$=(t-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&-1&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{vmatrix}$$

$$=(t-1)(-1)^{t-1}\neq 0,$$

则 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.

方法 2 用秩.

由题意可知

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t]\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]$，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t]$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$，则同方法 1，$|\boldsymbol{C}|\neq 0$，则 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})=r(\boldsymbol{A})$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关，可知 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)=t$，故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=t$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关.

魔研君点睛

（1）本题对于向量组线性相关性证明的两种处理方式都属于最基本的方法. 用秩和用定义，相比较而言，首选用秩.

（2）当遇到某向量组由另一向量组表示时，应立即想到将前者所形成的矩阵写成后者形成的矩阵再乘以另一矩阵的形式，如：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\beta}_2=k_4\boldsymbol{\alpha}_1+k_5\boldsymbol{\alpha}_2+k_6\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\beta}_3=k_7\boldsymbol{\alpha}_1+k_8\boldsymbol{\alpha}_2+k_9\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}\xRightarrow{\text{写成}}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}k_1&k_4&k_7\\k_2&k_5&k_8\\k_3&k_6&k_9\end{pmatrix}.$$

题型二：线性表示相关考题

魔研君点睛

这类问题的一个突出特点就是“一个向量和一个向量组之间的关系”，笼统点讲就是“该向量能否被一个向量组表示”，如若再进行细化，那就是进一步讨论“表示唯一”“表示无穷多个”“不能表示”了.

对于 n 个 m 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和一个 m 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 而言：

$\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示：$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ （形式一）

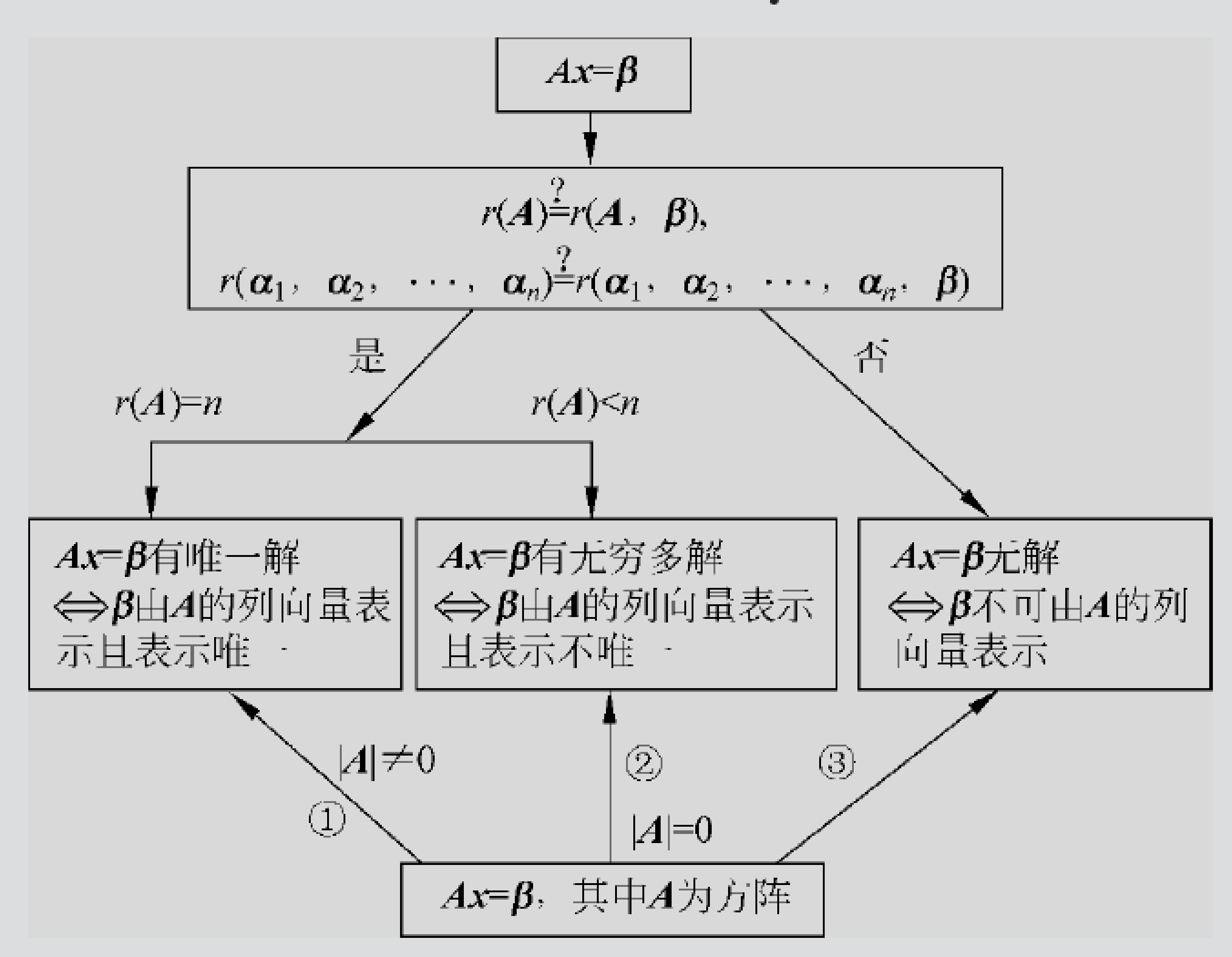
$\Updownarrow$ 转化

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$ （形式二）

$\Updownarrow$ 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$

非齐次线性方程组：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ （形式三）

方法：$\boldsymbol{\beta}$是否可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$是否有解.



由线性表示的三种形式可以看出，线性表示问题可以转化为非齐次线性方程组的求解问题.

【例 3.11】 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,1,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,4,0]^{\mathrm{T}}$. 问$\boldsymbol{\beta}=[1,0,3,1]^{\mathrm{T}}$ 能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若能表示，写出表达形式.

解析 设$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则所求等价于$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$是否有解，则

$$\bar{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\beta}]=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})<3$，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示不唯一. 解方程组得

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k+2\\2k-1\\k\end{pmatrix},$$

故 $$\boldsymbol{\beta}=(-3k+2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k-1)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,\quad k \text{ 为任意常数}.$$

【例 3.12】 设$\boldsymbol{\alpha}_1=[\lambda,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,\lambda,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,\lambda]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[1,\lambda,\lambda^2]$，试讨论$\lambda$为何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示；

(2) $\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示；

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示且表示不唯一.

解析 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，则有

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2,\end{cases} \qquad ①$$

则$\boldsymbol{\beta}$可否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示转化为方程组①的解问题.

因此,对①的增广矩阵进行初等行变换,则

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 1-\lambda^3\end{array}\right).$$

(1) 当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$,方程组①有唯一解,从而$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一地线性表示.

(2) 当$\lambda=-2$时,则$\bar{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$,方程组①无解,即$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(3) 当$\lambda=1$时,则$\bar{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$,则解方程组得$\boldsymbol{x}=k_1[1,0,-1]^{\mathrm{T}}+k_2[1,-1,0]^{\mathrm{T}}+[1,0,0]$,即$\boldsymbol{x}=[k_1+k_2+1,-k_2,-k_1]^{\mathrm{T}}$,其中$k_1,k_2$为任意常数.

因此,$\boldsymbol{\beta}=(k_1+k_2+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(-k_1)\boldsymbol{\alpha}_3$,$k_1,k_2$为任意常数.

【例 3.13】 证明:若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$唯一表示.

证明 设$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$,要证明$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$唯一表示,只需证$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$的解唯一,则只需证$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})=n$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关,则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$.

又因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})<n+1\Rightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})\leqslant n$,且$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})\geqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$,则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$.证毕.

【例 3.14】 设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,但不能由向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表示,记向量组Ⅱ为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$,则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$不能由Ⅰ线性表示,也不能由Ⅱ线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$不能由Ⅰ线性表示,但可由Ⅱ线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$可由Ⅰ线性表示,也可由Ⅱ线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$可由Ⅰ线性表示,但不可由Ⅱ线性表示

解析 由于$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,则存在$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}. \qquad ①$$

若 $k_m=0$，则$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$，表示$\boldsymbol{\beta}$可由Ⅱ表示，与已知条件矛盾，则 $k_m\neq0$. 由①知

$$\boldsymbol{\alpha}_m=-\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\frac{1}{k_m}\boldsymbol{\beta}, \tag{②}$$

则②表明$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅱ表示，可排除(A)，(D)选项.

假设$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅰ表示，则存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-1}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}. \tag{③}$$

将③回代①中，可知$\boldsymbol{\beta}$可由Ⅰ表示，这与已知条件矛盾，故$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不可由Ⅰ表示. 故选(B).

【例 3.15】 已知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示？

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示？

解析 (1) 由题可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

根据例 3.13 可知$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示.

(2) 由(1)知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一表示. 不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3.\boldsymbol{\alpha}_4)=r(k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

因此 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，则$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示.

题型三：向量组间互相表示相关问题

魔研君点睛

若向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示，则

$$\begin{cases}x_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}_1 & [\boldsymbol{b}_1\text{ 由}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\text{ 表示}],\\ x_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}_2 & [\boldsymbol{b}_2\text{ 由}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\text{ 表示}],\\ \quad\vdots \\ x_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}_m & [\boldsymbol{b}_m\text{ 由}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\text{ 表示}].\end{cases}$$

以 3 个向量的向量组为例进行分析：

$$\begin{cases}x_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{13}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}_1,\\ x_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{23}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}_2,\\ x_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{33}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b}_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}_1,\\ [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}_2,\\ [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}x_{31}\\x_{32}\\x_{33}\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}_3\end{cases}$$

$$\xrightleftharpoons[\substack{x_1=[x_{11},x_{12},x_{13}]^{\mathrm T},\\ x_2=[x_{21},x_{22},x_{23}]^{\mathrm T},\\ x_3=[x_{31},x_{32},x_{33}]^{\mathrm T}}]{\text{记}A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}\begin{cases}Ax_1=b_1,\\ Ax_2=b_2,\\ Ax_3=b_3\end{cases}\Leftrightarrow A[x_1,x_2,x_3]=[b_1,b_2,b_3]$$

$$\xrightleftharpoons{\text{记}B=[b_1,b_2,b_3]}Ax=B(\text{矩阵方程}).$$

方法：B的列向量可否由A的列向量表示$\Leftrightarrow Ax=B$是否有解

$Ax=B$

$r(A)=r(A \vdots B)$，
$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b_1, b_2, \cdots, b_m)$

否：
① $b_1, b_2, \cdots, b_m$不可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$表示，
② $Ax=B$无解

是，$r(A)=n$：
① $b_1, b_2, \cdots, b_m$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$唯一表示，
② $Ax=B$有唯一解

是，$r(A)<n$：
① $b_1, b_2, \cdots, b_m$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$表示且表示方法有无穷多个，
② $Ax=B$有无穷多解

$Ax=B$，其中A为方阵：$|A|=0$（无解）；$|A|\neq 0$（有唯一解）；$|A|=0$（有无穷多解）

【例 3.16】 设向量组$\alpha_1=[1,0,1]^{\mathrm T}$，$\alpha_2=[0,1,1]^{\mathrm T}$，$\alpha_3=[1,3,5]^{\mathrm T}$不能由向量组$\beta_1=[1,1,1]^{\mathrm T}$，$\beta_2=[1,2,3]^{\mathrm T}$，$\beta_3=[3,4,a]^{\mathrm T}$线性表示.

(1) 求 a 的值；

(2) 将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

解析 (1) 假设$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|\neq 0$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$一定可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$表示且表示方法唯一，此时与已知条件矛盾，故$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$. 此时，$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=0$，所以 $a=5$.

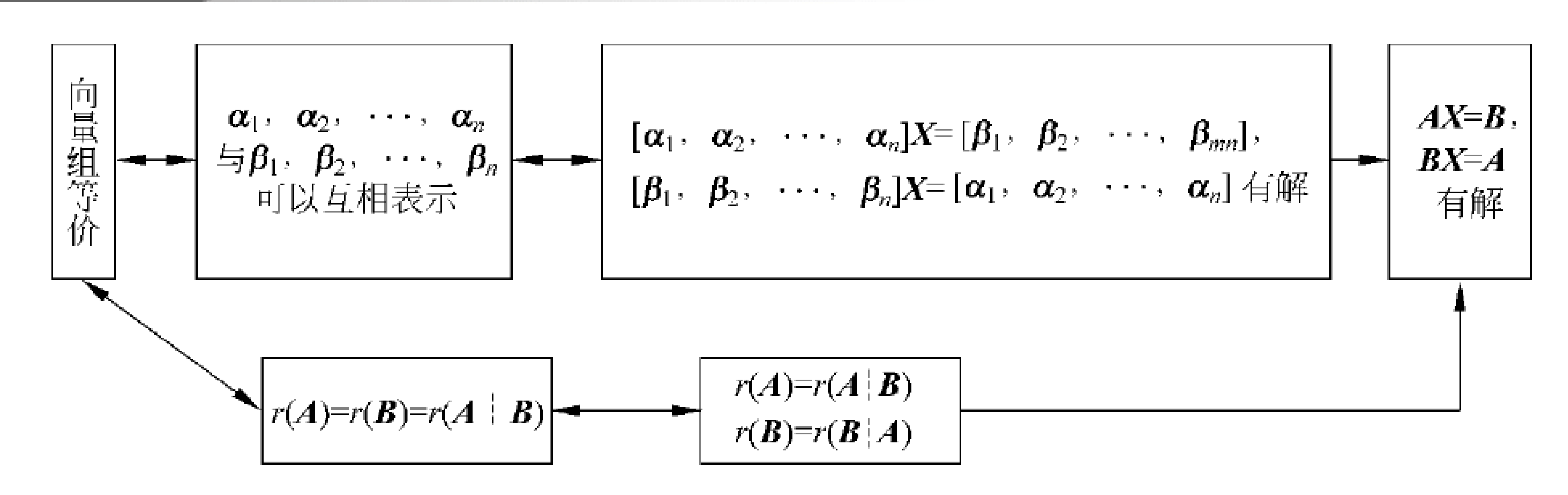
(2) “向量组β_1,β_2,β_3用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示”等价于“$\beta_1,\beta_2,\beta_3$均可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示”，则$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_i(i=1,2,3)$均有解，则将$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换，故有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

题型四：向量组等价相关考题



魔研君点睛

(1) 向量组等价不同于矩阵等价.向量组等价定义为两个向量组可以互相表示,但"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价"的充分必要条件为"$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同型且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$".

(2) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 A 的极大无关组,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 A 等价.

【例 3.17】 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,3,2]^{\mathrm{T}}$ 与向量组$\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,1,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=[1,1,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[4,3,1,4]^{\mathrm{T}}$ 是否等价.

解析 两个向量组等价的充分必要条件为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\cong(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&4\\0&1&1&1&3\\1&3&1&0&1\\1&2&2&1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1&4\\0&1&1&1&3\\0&2&-1&-1&-3\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

显然 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$,而 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$,所以两个向量组不等价.

【例 3.18】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(   ).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解析 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$ 有解$\Leftrightarrow\boldsymbol{C}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量表示.又 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{A}$ 有解$\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量表示,故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的列向量等价.故选(B).

【例 3.19】 设有向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,a+2]^{\mathrm{T}}$ 和Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,a+3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[2,1,a+6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[2,1,a+4]^{\mathrm{T}}$.试问:

(1) 当 a 为何值时,向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价?

(2) 当 a 为何值时,向量组Ⅰ与向量组Ⅱ不等价?

解析 进行初等行变换.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & a+2 & a-1 & a+1 & a-1\end{array}\right).$$

(1) 当 $a+1\neq0$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 且此时行列式 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=6$，所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示. 因此向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价.

(2) 当 $a+1=0$ 时，有 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$，此时 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=3$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故两个向量组不等价.

【例 3.20】 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

解析 (A)为充分但非必要条件：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示，则一定可推导出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关. 因为若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)<m$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 必线性相关，矛盾. 但反过来不成立，如当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=[0,1]^{\mathrm{T}}$ 均为单个非零向量，是线性相关的，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 并不能用 $\boldsymbol{\beta}_1$ 线性表示.

(B)为既非充分又非必要条件：如当 $m=1$ 时，考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=[0,1]^{\mathrm{T}}$ 均线性无关，但并不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，必要性不成立；又如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=[0,0]^{\mathrm{T}}$，可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}_1$ 并非线性无关，充分性也不成立.

(C)为充分但非必要条件：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关知 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关，充分性成立；当 $m=1$ 时，考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=[0,1]^{\mathrm{T}}$ 均线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$ 并不是等价的，必要性不成立.

(D)中矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m$，因此是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件. 故选(D).

魔研君点睛

若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

题型五：向量组的极大无关组和秩

1. 求秩

第 1 步：将向量组中各向量作为列向量构成矩阵；

第 2 步：对矩阵进行初等行变换求秩；

第 3 步：矩阵秩＝列向量组的秩.

2. 求极大无关组

第 1 步：同求秩第 1 步；

第 2 步：对矩阵进行初等行变换；

第 3 步：化为行阶梯形矩阵后，每个阶梯上取一列（一般取阶梯口处），对应向量所构成向量组即为极大无关组.

【例 3.21】 给定向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\-9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\9\end{pmatrix}.$$

(1) 求向量组的秩；

(2) 求此向量组的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组表示.

解析 (1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列构成矩阵，然后作初等行变换.

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=r(\boldsymbol{B})=3$.

(2) 从每个阶梯上选一列，这里选阶梯口处所对应列，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为极大无关组.

进一步将 $\boldsymbol{B}$ 化为行最简形矩阵（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 所对应列除阶梯所在位置元素为 1 外，其余全部为 0），则

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\quad\boldsymbol{\alpha}_1'\quad\boldsymbol{\alpha}_2'\quad\boldsymbol{\alpha}_3'\quad\boldsymbol{\alpha}_4'\quad\boldsymbol{\alpha}_5'$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_3'=-1\,\boldsymbol{\alpha}_1'+(-1)\boldsymbol{\alpha}_2'+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4'$，$\boldsymbol{\alpha}_5'=4\,\boldsymbol{\alpha}_1'+3\,\boldsymbol{\alpha}_2'+(-3)\boldsymbol{\alpha}_4'$，故 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=4\,\boldsymbol{\alpha}_1+3\,\boldsymbol{\alpha}_2-3\,\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 3.22】 设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1+a,1,1,1]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,2+a,2,2]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,3,3+a,3]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[4,4,4,4+a]^{\mathrm T}$. 问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解析 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3.$$

于是，当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a=-10$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4).$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

题型六：向量空间的基、过渡矩阵以及坐标

【例 3.23】 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为________.

解析 根据定义，从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}.$$

【例 3.24】 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，且 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

(2) 当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求出所有这样的 $\boldsymbol{\xi}$.

解析 (1) $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

(2) 由题意知

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0},$$

即

$$k_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},\quad k_i\neq0,i=1,2,3,$$

$$k_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=0,$$

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$ 有非零解，即 $|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，则 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$，得 $k=0$.

而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，则 $k_2=0,k_1+k_3=0$，故 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_3,k_1\neq0$.

自测题精选

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行(列)的元素对应成比例

(B) $\boldsymbol{A}$ 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(C) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行(列)的元素全为 0

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维列向量，那么，下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

(D) 若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

3. 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则(　　).

(A) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关

(B) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关

(D) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关

4. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_s$ 线性相关

(B) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_s$ 线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_s$ 线性相关

(D) 若 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_s$ 线性无关

5. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,2,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,7,14]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[1,-2,2,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=[2,1,5,10]^{\mathrm{T}}$，则该向量组的极大线性无关组是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$

6. 设行向量组[2,1,1,1],[2,1,a,a],[3,2,1,a],[4,3,2,1]线性相关,且 $a\neq 1$,则 $a=$________.

7. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,若$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A\alpha}$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$线性无关,则 t 满足________.

8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&t&1\\2&2&0\\1&3&2\end{pmatrix}$,三维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,若 $r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)<3$,则 t 满足________.

9. 若向量$\boldsymbol{\beta}=[4,5,2,10]^{\mathrm{T}}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,-1,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1,t]^{\mathrm{T}}$唯一线性表示,则 $t=$________.

10. 设$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性________.

11. 已知向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$;向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_4$;向量组Ⅲ:$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\alpha}_5$,如果它们的秩分别为 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)$=3$,r(Ⅲ)$=4$,求 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量,若 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,证明向量组$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A\alpha}$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$,…,$\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

13. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,-1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[5,3,t]^{\mathrm{T}}$. 试讨论 t 的情况,使得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别线性相关及线性无关.

14. 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,2,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[7,0,14,3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=[5,1,6,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_5=[2,-1,4,1]^{\mathrm{T}}$. 求该向量组的秩和一个极大无关组,并将剩余向量用该极大无关组来表示.

15. 设有向量$\boldsymbol{\alpha}_1=[a,2,10]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,1,5]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,1,4]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[1,b,-1]^{\mathrm{T}}$. 问 a,b 为何值时,有:

(1) 向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示式唯一;

(3) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表示式不唯一,并求出一般表示式.

16. 确定常数 a,使向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,a]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,a,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[a,1,1]^{\mathrm{T}}$ 可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=$

$[1,1,a]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[-2,a,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[-2,a,a]^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

17. 设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,4,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[5,-1,-8,9]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个规范正交基.

自测题解题参考

1．由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性相关，由线性相关概念可知，选(C).

2．对于(A)，应该是“存在一组不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1++k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$”，故错误.

对于(B)，该句话等价于“若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$”，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，正确.

对于(C)，题干中“任意”应改为“存在”，故错误.

对于(D)，由线性无关定义可知，错误. 故选(B).

3．由题可知，

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

当 $r<s$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant s$，故不可确定向量组Ⅰ或向量组Ⅱ线性相关性.

当 $r>s$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant s<r$，则向量组Ⅰ必线性相关. 故选(D).

4．由于$[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s]=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]$，则 $r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$，则$(\boldsymbol{A\alpha}_1\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)<s\Rightarrow\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关. 故选(A).

5．$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&4&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$
故可得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量组的一个极大无关组. 故选(B).

6．由题意知，行向量形式矩阵行列式为 0，则

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=(a-1)(2a-1)=0,$$

则 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$. 由题意知 $a\neq1$，则 $a=\dfrac{1}{2}$.

7．$t\neq0$.

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}]=\begin{pmatrix}0&t&2t\\1&1&1\\1&1&2t+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&t&2t\\0&0&2t\end{pmatrix},$$

则当 $t\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

8. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&t&1\\2&2&0\\1&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&1-t\\0&0&0\end{pmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以

$$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3))=r(\boldsymbol{A})<3,$$

则 $t=1$.

9. 由题意知 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，故 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}]=\begin{pmatrix}1&0&1&4\\2&1&1&5\\1&-1&1&2\\1&2&t&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&4\\0&1&-1&-3\\0&0&1&5\\0&0&0&7-5t\end{pmatrix}$，即当且仅当 $t=\frac{7}{5}$ 时满足.

10. $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，

其中 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$，则 $r(\boldsymbol{B})<3$，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{B})<3$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

11. 由于 $r(\mathrm{I})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$r(\mathrm{II})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示.

又 $r(\mathrm{III})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，则 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5]\xrightarrow{\text{列变换}}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5]$，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$.

12. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}. \quad ①$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{m-1}$，则有 $k_1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，则 $k_1=0$.

同理，依次再对①两边左乘 $\boldsymbol{A}^{m-2},\cdots,\boldsymbol{A}$，可得

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0,$$

则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

13. 由于 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&5\\1&3&3\\0&-1&t\end{vmatrix}=2(1-t)$，则当 $t=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；当 $t\neq$

1 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

14. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，一个极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，且$\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2$.

15. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}]=\begin{pmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&-1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&1&b\\0&0&-1&-1-5b\\0&-2-\frac{a}{2}&-1-\frac{a}{2}&1-\frac{ab}{2}\end{pmatrix},$$

则：(1)当 $a=-4$ 且 $b\neq0$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，此时$\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示；

(2) 当 $a\neq-4$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，此时$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示；

(3) 当 $a=-4,b=0$ 时，则$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示且表示方法不唯一，其中$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}_1-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$k$ 为任意常数.

16. 由题知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 表示，即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$有解.

又$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示，则$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$无解，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，即$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，故$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(2+a)(a+1)^2=0$，得 $a=1$ 或-2.

当 $a=1$ 时，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-2&-2\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0&-3\end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\Rightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示，且 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=$

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 表示，则 $a=1$ 满足.

当 $a=-2$ 时，$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\to\begin{pmatrix}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&3\\0&0&6&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=$ $2\neq r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 表示，则 $a=-2$ 不满足.

综上所述，$a=1$.

17. $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{pmatrix}1&-1&5\\1&1&-1\\2&4&-8\\3&-1&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-3\\0&1&-3\\0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为其一个极大无关组. 又解空间维数为 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为解空间的一组基.

正交化：令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{pmatrix}$.

单位化：$\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{1}{\sqrt{15}}[1,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{39}}[-2,1,5,-3]^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 即为所求规范正交基.

第 4 章 线性方程组

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1.	会用克拉默法则	数学一、二、三
2.	理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件	数学一、二、三
3	理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法	数学一、二、三
4	理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念	数学一、二、三
5	掌握用初等行变换求解线性方程组的方法	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

线性方程组是线性代数中极其重要的章节，同时也是每年考研的一大热点内容，其基本点往往都是围绕“齐次线性方程组求解”和“非齐次线性方程组求解”展开的，所以大家在本章的学习过程中应该更加注重基础运算，在基本概念的掌握和理解上多下功夫. 除此之外，要善于构建起本章和第 3 章核心内容的联系，这样才能更好地解决各种相关类型问题. 大家加油！

以下提出几个问题，方便大家更加有条理地进行复习：

(1) 线性方程组是否有解？如何判定？

(2) 若线性方程组有解？解的结构如何？

(3) 若线性方程组有解，怎样求解？

必会基本内容

一、线性方程组的表达形式

1. 一般形式：n 个未知量、m 个方程的齐次线性方程组可表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程组的 n 个未知量，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$是第 i 个方程中第 j 个未知量的系数.

如果 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零，这时方程组(4.1)称为齐次线性方程组，否则称为非齐次线性方程组.

2. 矩阵形式：若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组(4.1)等价于

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \tag{4.2}$$

齐次线性方程组矩阵形式为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}, \tag{4.3}$$

其中 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组(4.1)的系数矩阵，$\boldsymbol{x}$ 称为未知量向量，$\boldsymbol{b}$ 称为常数项向量.

将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 作为分块矩阵，$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}]$称为增广矩阵.

3. 向量形式：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则方程组(4.1)亦可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=b, \tag{4.4}$$

齐次线性方程组表示为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$. (4.5)

二、齐次线性方程组

1. 齐次线性方程组的解的判定

(1) 若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关；

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

(2) 特别地，若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组线性无关；

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组线性相关.

2. 齐次线性方程组的解的性质

1) 齐次线性方程组解的性质

(1) 如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是它的解.

(2) 如果$\boldsymbol{\eta}$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则 $k\boldsymbol{\eta}$ 也是它的解，k 为任意常数.

综上可知，第$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 仍为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

2）齐次线性方程组的基础解系

当齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解时，其解向量集合的一个极大无关组$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$称为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，其中 $r=r(\boldsymbol{A})$. 此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解为 $x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$. 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数. 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解时，没有基础解系.

魔研君点睛

从定义角度上，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$基础解系必须满足三点：

（1）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解；

（2）基础解系个数 $S=n-r(\boldsymbol{A})$，n 为 $\boldsymbol{A}$ 列数；

（3）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

小试牛刀

【例 4.1】 设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一组基础解系，判定$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$ 是否也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系？

解析

检验基础解系问题，须从“解、个数、线性无关”三点出发一一验证，缺一不可.

（1）（个数）　已知$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系个数 $S=3$，故$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$ 个数满足.

（2）（解）　已知 $\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\xi}_3=\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1)=\boldsymbol{0},$$

故$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

（3）（线性无关）　设 $k_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+k_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)+k_3(\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1)=\boldsymbol{0}$，则

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\xi}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\xi}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}.$$

已知$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\ k_1+k_2=0,\\ k_2+k_3=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

则$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$ 线性无关.

综上所述，$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

魔研君点睛

本题目条件不变，那么$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$ 是否也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系？

3）齐次线性方程组基础解系及通解求法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，对于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$求解方法如下：

对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换（必要时重新排列未知量顺序），可知

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&C_{1(r+1)}&\cdots&C_{1n}\\0&1&\cdots&0&C_{2(r+1)}&\cdots&C_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&C_{r(r+1)}&\cdots&C_{rn}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{B}$ 所对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} x_1 & & & + C_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + C_{1n}x_n = 0, \\ & x_2 & & + C_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + C_{2n}x_n = 0, \\ & & \ddots & \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & & x_r & + C_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + C_{rn}x_n = 0, \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解，$x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为独立未知量，$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量，分别给自由未知量赋值：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{为} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

此时可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解，即基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -C_{1(r+1)} \\ -C_{2(r+2)} \\ \vdots \\ -C_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -C_{1(r+2)} \\ -C_{2(r+2)} \\ \vdots \\ -C_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r} = \begin{pmatrix} -C_{1n} \\ -C_{2n} \\ \vdots \\ -C_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

魔研君点睛

快速写出基础解系是线性代数这门课程的必备能力，培养良好的做题习惯和套路是非常有必要的，在此将讲解一种行之有效的计算方法，帮助同学快速拿分！

填空式方法解基础解系

第 1 步：将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换化为行阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \boldsymbol{B}(\text{行阶梯})$$

第 2 步：判定是否有非零解，设 $r(\boldsymbol{A})=r$（行阶梯中非零行行数）.

① 若 $r(\boldsymbol{A})=r=n$（$\boldsymbol{A}$ 列数），则仅有零解，无基础解系.

② 若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$（$\boldsymbol{A}$ 列数），则有 $S=n-r(\boldsymbol{A})$ 个基础解系，再进行第 3 步.

第 3 步：将 $\boldsymbol{B}$（行阶梯）再进行初等行变换化为行最简 $\boldsymbol{C}$.

第 4 步：找自由未知量，用填空式方法赋值求解.

具体地，这个步骤细化如下：①先找独立未知量（非零行首非零元所有对应未知量），剩余即为自由未知量；②赋值，给自由未知量赋值，有几个赋几组，均赋成线性无关的几组值. 一般自由未知量依次赋 1，其余均为 0，形成 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的结果；③求解，用填空式方法写出基础解系.

小试牛刀

【例 4.2】 求 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2-x_3-5x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系，并写出通解.

解析

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B(\text{行阶梯}).$$

由于 $r(B)=2<4$，则 $Ax=0$ 有非零解.

$$B\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C(\text{行最简}).$$

按照取自由未知量的原则，取 x_2 及 x_4 为自由未知量，则令(x_1，x_3 位置空出不写)

$$\boldsymbol{\xi}_1=[__,1,__,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=[__,0,__,1]^{\mathrm{T}},$$

将 C 中第 2 列(即 x_2 所对应列)中前两个元素的相反数填入 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的两个空中，则

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0,0]^{\mathrm{T}}.$$

同理将 C 中第 4 列(即 x_4 所对应列)中前两个元素的相反数填入 $\boldsymbol{\xi}_2$ 的两个空中，则

$$\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}},$$

从而原方程的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0,0]^{\mathrm{T}}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}},$$

通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 k_1，k_2 为任意常数.

【注】 解析中方法为先写基础解系，再写通解，也可以先写通解，再写基础解系.

例 4.2 中 $A\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C$(行最简矩阵)，即可得与原方程组同解的方程组：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_4=0,\\x_3=0.\end{cases}$$

为了把解表示得更清楚些，可以写成

$$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4,\\x_2=x_2,\\x_3=0,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

令 $x_2=k_1$，$x_4=k_2$，将独立未知量用自由未知量表示：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1+k_2\\k_1\\0\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}),$$

基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=[-2,1,0,0]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}}$.

相比而言，先写基础解系的思路更加快速，所以是线性代数课程的必备基础能力.

三、非齐次线性方程组

1. 解的判定（$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵）

若 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组表示，

若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\begin{cases}=n\Leftrightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{ 唯一解}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}\text{ 可由 }\boldsymbol{A}\text{ 的列向量组唯一表示，}\\<n\Leftrightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\text{ 无穷多解}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}\text{ 可由 }\boldsymbol{A}\text{ 的列向量组表示，且不唯一.}\end{cases}$

2. 解的性质

（1）设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

（2）设 $\boldsymbol{\xi}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{\eta}$ 为非齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

3. 解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵）有无穷多解，则通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\xi}^*,$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$（$r=r(\boldsymbol{A})$）为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\xi}^*$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

4. 非齐次线性方程组通解求法

第 1 步：对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵.

第 2 步：看 $r(\boldsymbol{A})$ 是否等于 $r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 若 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；若 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，再进行第 3 步.

第 3 步：将 $\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 进一步化为行最简矩阵. 先令 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，再令所有自由未知量为 0，求得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

第 4 步：按照解的结构写出通解.

小试牛刀

【例 4.3】 求解方程组：

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1,\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解析 方法 1 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换化为行最简矩阵，得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&1\\0&0&-1&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\overline{\boldsymbol{B}}.$$

先解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系(令虚线后为 0),则

$$\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,2,1]^{\mathrm{T}}.$$

再解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的特解,令自由未知量 $x_2=x_4=0$,则

$$\boldsymbol{\xi}^*=\left[\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right]^{\mathrm{T}},$$

故通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}^*$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

方法 2 原方程的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=\dfrac{1}{2},\\ x_3-2x_4=\dfrac{1}{2}\end{cases}(x_2,x_4\text{ 为自由未知量}).$$

令 $x_2=k_1,x_4=k_2$,将独立未知量用自由未知量进行表示:

$$\begin{cases}x_1=k_1+k_2+\dfrac{1}{2},\\ x_2=k_1,\\ x_3=2k_2+\dfrac{1}{2},\\ x_4=k_2,\end{cases}$$

则 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+\dfrac{1}{2}\\k_1\\2k_2+\dfrac{1}{2}\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\0\\\dfrac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2$ 为任意常数$)$.

四、克拉默法则

定理 设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

若系数矩阵行列式 $D=|\boldsymbol{A}|\neq0$,则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中,D_j 是用方程组右端常数项列替换 D 中第 j 列所得行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

魔研君点睛

克拉默法则仅能用于系数矩阵为方阵的线性方程组，即仅可用于求方程个数与变量个数相等的线性方程组.

【例 4.4】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，且已知 $a_1\neq a_2\neq a_3\neq a_4$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解为________.

解析 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)\neq0$，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解. 由克拉默法则知

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|}{|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=0,x_3=\frac{D_3}{D}=0,x_4=\frac{D_4}{D}=0,$$

故 $\boldsymbol{x}=[1,0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

魔研君点睛

根据克拉默法则可分别得到齐次线性方程组和非齐次线性方程组的结论.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$	若 $\|\boldsymbol{A}\|\neq0$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解且 $x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$； 若 $\|\boldsymbol{A}\|=0$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解或无穷多解
$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$	若 $\|\boldsymbol{A}\|\neq0$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解； 若 $\|\boldsymbol{A}\|=0$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

考试题型与解析

题型一：数值型线性方程组求解

魔研君点睛

线性方程组解的判定以及克拉默法则都是这种类型问题的重要处理思路，根据题目特点，当系数矩阵为方阵时，克拉默法则的应用可能更加快速简便.

【例 4.5】 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2=2,\\2x_1+3x_2+x_3=3,\\3x_1+4x_2+ax_3=b\end{cases}$ 有唯一解，则 a,b 满足________；若线性方程组无解，则 a,b 满足________.

解析 方法 1　非齐次线性方程组解的判定.

对增广矩阵进行初等变换，则

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\2&3&1&3\\3&4&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-1&1&-1\\0&-1&a-1&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&1&-1&1\\0&0&a-2&b-4\end{pmatrix}$$

当 $a\neq2$ 时，$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})=3$，则方程组有唯一解，与 b 无关；

当 $a=2,b\neq4$ 时，$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})<3$，则方程组无解.

方法 2　克拉默法则.

当 $|\mathbf{A}|\neq0$ 时，非齐次线性方程组有唯一解，此时

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&4&a\end{vmatrix}=2-a.$$

当 $a\neq2$，$|\mathbf{A}|\neq0$ 时，则方程组有唯一解，此时与 b 取值无关；

当 $a=2$，$|\mathbf{A}|=0$ 时，非齐次线性方程组无解或者无穷多解，故

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\2&3&1&3\\3&4&2&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-1&1&-1\\0&-1&1&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&1&-1&1\\0&0&0&b-4\end{pmatrix},$$

故当 $a=2,b\neq4$ 时，$r(\mathbf{A})=r(\bar{\mathbf{A}})<3$，则方程组无解.

魔研君点睛

当系数矩阵为方阵时，利用克拉默法则处理会更加直接.

【例 4.6】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,3,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的两个解，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&a&3\\b&2&-6\end{pmatrix}$，则 $a=$________，$b=$________.

解析　根据向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，可知三元线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 至少有两个线性无关的解，则 $s=n-r(\mathbf{A})=3-r(\mathbf{A})\geqslant2$，可得 $r(\mathbf{A})\leqslant1$.

又因为 $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$，则 $r(\mathbf{A})\geqslant1$，综上可知 $r(\mathbf{A})=1$，因此

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&a&3\\b&2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&a+1&0\\b-4&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{B}.$$

$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=1\Leftrightarrow\mathbf{B}$ 中最高阶非零子式为一阶，则

$$\begin{vmatrix}1&-3\\a+1&0\end{vmatrix}=3(a+1)=0,\quad\begin{vmatrix}2&1\\b-4&0\end{vmatrix}=-(b-4)=0,$$

故 $a=-1,b=4$.

魔研君点睛

还有另一种思路，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$，则 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，根据克拉默法则可知 $|\mathbf{A}|=0$，此时

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-3\\-2&a&3\\b&2&-6\end{vmatrix}=3(a+1)(b-4)=0,$$

可知 $a=-1$ 或 $b=4$. 再根据上面解析中 $r(\boldsymbol{A})=1$，当且仅当 $a=-1$ 且 $b=4$ 时才满足，故可得 $a=-1,b=4$.

【例 4.7】 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则（　　）.

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

(C) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

解析 根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，可知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 而 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，根据克拉默法则可知 $|\boldsymbol{A}|=0$，此时

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1+\lambda^2&\lambda^2\\1&\lambda+1&1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0,$$

则 $\lambda=1$. 又根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，可知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n=3$，而当 $\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，则 $r(\boldsymbol{B})\leqslant2<3$，则 $|\boldsymbol{B}|=0$. 故选(C).

魔研君点睛

1. 本题求解 $|\boldsymbol{B}|=0$ 还有另外一种思路(反证法).

假设 $|\boldsymbol{B}|\neq0$，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，两边右乘 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵，则可知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，这与已知条件相矛盾，故假设不成立，可知 $|\boldsymbol{B}|=0$.

2. 本题还考查了线性代数中极为常见的 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 型考题，对这种类型问题在备考中需要形成很强的定势思维能力. 根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，立即可得两个结论：(1)$\boldsymbol{B}$ 的列向量均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；(2)$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$($n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数，也即 $\boldsymbol{B}$ 的行数).

题型二：抽象型线性方程组解

魔研君点睛

这类问题的处理更加考查大家对线性方程组解判定的理解和掌握，除此之外，矩阵秩的相关公式也是重点考查对象，所以这类问题具有一定的抽象性和难度.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，主要是看系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的列数 n 的关系(重点强调是列数，不是行数，除非是方阵). 当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

对于非齐次线性方程组而言，首先需要看增广矩阵的秩 $r(\overline{\boldsymbol{A}})$ 和系数矩阵 $r(\boldsymbol{A})$ 的关系. 如果 $r(\overline{\boldsymbol{A}})\neq r(\boldsymbol{A})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；只有当 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 才有解，这时才需要再具体看是唯一解还是无穷多解，具体再看秩 $r(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的列数 n 的关系，总的来说，有以下三点：

(1) 当 $r(\overline{\boldsymbol{A}})\neq r(\boldsymbol{A})$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

(2) 当 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=n$($n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数)时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(3) 当 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<n$($n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数)时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

【例 4.8】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n,n\times m$ 矩阵，则齐次方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$(　　).

(A) 当 $n>m$ 时，仅有零解　　　(B) 当 $n>m$ 时，必有非零解

(C) 当 $m>n$ 时，仅有零解　　　(D) 当 $m>n$ 时，必有非零解

解析　用矩阵的秩的性质及齐次方程组有解的判定定理. 因为 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶方阵，所以方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$有 m 个未知数. 故当 $m>n$ 时，由矩阵秩的性质可知有 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant n<m$，因此，方程组有非零解. 故选(D).

【例 4.9】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解

解析

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$. 现在的问题是由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 能否推导出 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$？若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，结论肯定正确，那么 $m\times n$ 矩阵呢？

考查下面的例子：$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_1-x_2=0,\\x_1+2x_2=0,\end{cases}$　$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\x_1-x_2=2,\\x_1+2x_2=3.\end{cases}$

显然 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，可见(A)不正确.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$. 因为 $r(\boldsymbol{A})<n$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$必有非零解. 故选(D).

【例 4.10】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量. 若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})$，则线性方程组(　　).

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解　　　(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$仅有零解　　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$必有非零解.

解析　由题意知，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是一维行向量，可知 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}$是 $n+1$ 阶矩阵. 显然有 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})\leqslant n\leqslant n+1$，即系数矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}$非列满秩. 由齐次线性方程组有非零解的充要条件：系数矩阵非列满秩，可知齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$必有非零解. 故选(D).

题型三：含参线性方程组

魔研君点睛

此类问题是线性代数这门课程的重要考点，掌握处理这类问题的手段是极其必要的，希望大家在复习过程中加以重视！

(1) 当系数矩阵为方阵时，从行列式角度，利用克拉默法则处理更加简便. 对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$而言，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时仅有零解，$|\boldsymbol{A}|=0$ 时有非零解；而对于非齐次线性方

程组而言，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时有唯一解，当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时还需要将增广矩阵进行行初等变换化为行阶梯矩阵进行判断无解和有解的情况.

（2）当系数矩阵不是方阵时，则需要根据线性方程组解的判定来处理，即将系数矩阵 $(\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0})$ 或者增广矩阵 $(\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b})$ 进行初等行变换化为行阶梯矩阵进行判定.

【例 4.11】 当 a 为何值时，齐次线性方程组：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ x_1+ax_2+\cdots+x_n=0, \\ \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+ax_n=0 \end{cases}$$

（1）只有零解；（2）有非零解，并求其通解.

解析 齐次线性方程组系数矩阵为方阵，利用克拉默法则判定更加简便.

系数矩阵的行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

（1）当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时仅有零解，此时 $a\neq 1-n$ 且 $a\neq 1$；

（2）当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时仅有零解，此时 $a=1-n$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，对系数矩阵进行行初等变换，化为行最简形矩阵，并求解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$，可得基础解系为

$\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\xi}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，　$\cdots$，　$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，

故原方程组通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a=1-n$ 时，同上进行求解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1-n & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ n & -n & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ n & & & -n & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & -1 & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

可知，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $s=n-r(\boldsymbol{A})=1$，可得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，故原方程组的通解为 $k\boldsymbol{\xi}$，其中 k 为任意常数.

【例 4.12】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & \lambda & 0 & 1\end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解向量，试求 λ 的值，并求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解析 由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 含有两个线性无关的解向量，则 $s=n-r(\boldsymbol{A})=4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 4-2=2$. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 中二阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$，则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 综合可知，$r(\boldsymbol{A})=2$.

对线性方程组的系数矩阵进行初等变换：

$$\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1-2\lambda & 2-2\lambda\\ 0 & 1 & \lambda & \lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2+2\lambda-1\end{pmatrix},$$

故 $\lambda=1$. 当 $\lambda=1$ 时，$\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得到方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1[1,-1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[0,-1,0,1]^{\mathrm{T}},\quad \text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$

【例 4.13】 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0.\end{cases}$ 求：

(1) a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解；

(2) a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多组解，并且基础解系表示全部解.

解析 由于系数矩阵为方阵，从行列式入手，利用克拉默法则处理更加快速.

(1) 系数行列式是三阶范德蒙德行列式，有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b),$$

由克拉默法则，当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $a\neq b\neq c$ 时，方程组仅有零解.

(2) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，即 $(b-a)(c-a)(c-b)=0$，此时分成 $a=b\neq c$，$b=c\neq a$，$a=c\neq b$，$a=b=c$ 四种情况进行讨论分析：

① 当 $a=b\neq c$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a & c\\ a^2 & a^2 & c^2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，通解为 $\boldsymbol{x}=k[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意

常数.

② 当 $a=c\neq b$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&a\\a^2&b^2&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，通解为 $\boldsymbol{x}=k[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数；

③ 当 $b=c\neq a$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&b\\a^2&b^2&b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，通解为 $\boldsymbol{x}=k[0,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数；

④ 当 $a=b=c$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&a&a\\a^2&a^2&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，通解为 $\boldsymbol{x}=k_1[-1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

【例 4.14】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

(2) 当实数 a 取何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多组解，并求其通解.

解析 (1) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$.

(2) 对增广矩阵进行初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$$

根据线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，可知 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<n=4$，因此 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3$，则 $\begin{cases}1-a^4=0,\\-a-a^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

将增广矩阵进一步化为行最简形矩阵，有

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而可知导出组的基础解系为$\boldsymbol{\eta}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，非齐次方程的特解为$\boldsymbol{\eta}^{*}=(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$，所以通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

魔研君点睛

因为系数矩阵为方阵，本题的第(2)问也可以从行列式角度出发，利用克拉默法则进行处理. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$，当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 分为无解或者有无穷多解两种情况，因此还需要将增广矩阵进行行初等变换化为行阶梯形矩阵，根据 $r(\boldsymbol{A})$ 和 $r(\overline{\boldsymbol{A}})$是否相等进一步判定是哪种情况.

当 $|\boldsymbol{A}|=1-a^4=0$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 可能有无穷多解，此时 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

此时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，$r(\boldsymbol{A})=3$，故方程组无解，故不可取.

当 $a=-1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

此时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3<4$，故方程组有无穷多组解，可得方程组的通解为 $k[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+[0,-1,0,0]^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

【例 4.15】 设方程组为

$$\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+2\lambda,\\x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+2\lambda^2,\\x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+2\lambda^3.\end{cases}$$

求当 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解、有无穷多解，并在有解情况下求其通解.

解析 根据系数矩阵为方阵，可以从行列式角度出发，利用克拉默法则进行处理.

系数矩阵行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3).$$

(1) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，方程组有唯一解，即 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$，根据克拉默法则进行求解，则

$$x_1=\frac{(\lambda+2)(2-\lambda^2)}{\lambda+3},\quad x_2=\frac{(\lambda+2)(2\lambda-1)}{\lambda+3},\quad x_3=\frac{(\lambda+2)(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)}{\lambda+3},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}\lambda^2+2\lambda & 1 & 1\\ \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda+1 & 1\\ \lambda^4+2\lambda^3 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)(2-\lambda^2),$$

$$D_2=\lambda^2(\lambda+2)(2\lambda-1),$$

$$D_3=\lambda^2(\lambda+2)(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1).$$

(2) 当 $\lambda=0$ 时，增广矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

此时线性方程组的通解为 $k_1[-1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

(3) 当 $\lambda\neq -3$ 时，增广矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-2&1&1&3\\1&-2&1&-9\\1&1&-2&27\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1&-9\\0&-3&3&-15\\0&0&0&21\end{pmatrix}.$$

此时，$r(\bar{\boldsymbol{A}})=3$，$r(\boldsymbol{A})=2$，故方程组无解.

【例 4.16】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

(2) 对(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解析 (1) 第(1)问等价于分别求解两个非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$，两个方程组求解的通解结果即为 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$(要将通解结果写成单一向量形式). 解方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\xi}_1$，得

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1 为任意常数.

其次，再解方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$，先求系数矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 为

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix},$$

将增广矩阵进行初等行变换，化为行最简矩阵，得

$$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\xi}_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 k_2,k_3 为任意常数.

（2）由于

$$\begin{vmatrix}-1&k_1&k_2+\frac{1}{2}\\1&-k_1&-k_2\\-2&2k_1+1&0\end{vmatrix}=2k_1k_2+(2k_1+1)\left(k_2+\frac{1}{2}\right)-2k_1\left(k_2+\frac{1}{2}\right)-k_2(2k_1+1)$$

$$=\frac{1}{2}\neq0,$$

故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

【思考】 第(2)问是否还有其他证明方法？

题型四：抽象型线性方程组求解

魔研君点睛

此类问题主要考查对线性方程组通解结构的理解. 对于齐次线性方程组，通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为齐次线性方程组的一组基础解系，其实可以通过四个步骤处理齐次线性方程组通解问题：

第 1 步：确定基础解系个数，$s=n-r(\boldsymbol{A})=n-r$，其中 n 为 $\boldsymbol{A}$ 的列数；

第 2 步：根据线性方程组性质找 s 个 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$；

第 3 步：确定 s 个 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关；

第 4 步：写出通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$.

对于非齐次线性方程组问题，其通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\xi}^*$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为齐次线性方程组的一组基础解系，$\boldsymbol{\xi}^*$ 为非齐次线性方程组的一个特解. 因此，只需要在齐次线性方程组的通解基础上再任意找一个非齐次线性方程组的一个特解，就可以写出通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\xi}^*$.

【例 4.17】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\a&b&c\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解是（　　）.

(A) $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$ (B) $k_1\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$ (C) $k_1\begin{pmatrix}3\\1\\c\end{pmatrix}$ (D) $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$($k_1,k_2$ 为任意常数)

解析

本题主要考查齐次线性方程组的通解结构,先确定基础解系个数 s,再找 s 个线性无关的解即可.

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=2$,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中含两个解.又由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$知,$\boldsymbol{A}$ 的每一个列向量都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.因为列向量$[1,0,a]^{\mathrm{T}}$,$[2,1,b]^{\mathrm{T}}$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为 $k_1[1,0,a]^{\mathrm{T}}+k_2[2,1,b]^{\mathrm{T}}$.故选(D).

【注】 思考 $k_1[2,1,b]^{\mathrm{T}}+k_2[3,1,c]^{\mathrm{T}}$ 以及 $k_1[1,0,a]^{\mathrm{T}}+k_2[3,1,c]^{\mathrm{T}}$ 是否也是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解?

【例 4.18】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素和均为零,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为________;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式 $A_{11}\neq 0$,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为______________,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为______________.

解析 由于 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,因此知方程组有非零解,且基础解系只含有一个无关解.

(1) 依题设,$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,从而知$[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个非零解,构成基础解系.因此,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$通解为 $k[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

(2) 依题设,$|\boldsymbol{A}|=0$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,知 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量组均为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解,由于 $A_{11}\neq0$,知$[A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}]^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的非零解,构成基础解系.因此,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为 $C[A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}]^{\mathrm{T}}$($C$ 为任意常数).

因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,有 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,从而知方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系由 $n-1$ 个线性无关解构成.又由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$知,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.由题设 $A_{11}\neq0$,知由 $\boldsymbol{A}$ 的后 $n-1$ 个列向量$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成的子块含 $n-1$ 阶非零子式,满秩,从而知$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,构成方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.因此,$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为 $C_1\boldsymbol{\alpha}_2+C_2\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+C_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n$($C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$ 为不全为零的常数).

【例 4.19】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的 3 个线性无关的解,$k_1,k_2$ 为任意常数,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解为(   ).

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$

解析　由题可知，$A\neq 0\Rightarrow r(A)\geqslant 1$.

同时，$Ax=\beta$ 有三个线性无关的解，则 $Ax=\beta$ 的线性无关解的个数至少为 3 个，即 $n-r(A)+1\geqslant 3\Rightarrow r(A)\leqslant n-2=3-2=1$，故 $r(A)=1$，因此齐次线性方程组基础解系个数 $s=2$.

先确定两个线性无关的齐次解，已知 η_1,η_2,η_3 均满足 $Ax=\beta$，可得 $A\eta_1=\beta$，$A\eta_2=\beta$，$A\eta_3=\beta$，因此 $A(\eta_3-\eta_1)=0$，$A(\eta_2-\eta_1)=0$，即 $\eta_3-\eta_1$，$\eta_2-\eta_1$ 为两个齐次线性方程组的解. 其次，检验这两个的线性无关性.

设 $k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)=0$，整理得 $(-k_1-k_2)\eta_1+k_1\eta_3+k_2\eta_2=0$. 由于 η_1,η_2,η_3 线性无关，则 $k_1=k_2=0$，因此 $\eta_3-\eta_1$，$\eta_2-\eta_1$ 线性无关. 综上，$\eta_3-\eta_1$，$\eta_2-\eta_1$ 为齐次线性方程组的基础解系.

再找一个非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的特解，已知 $A\eta_1=\beta$，$A\eta_2=\beta$，$A\eta_3=\beta$，则 $A\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}=\beta$，故 $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 为 $Ax=\beta$ 的特解. 故选(C).

【例 4.20】　已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为四维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解析　由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，即 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，知 $r(A)=3$.

因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，所以 $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解.

因为 $r(A)=3$，所以方程组 $Ax=\beta$ 的基础解系包含一个解.

再由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，得 $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$，所以 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的一个非零解，故由解的结构知 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$(其中 k 是任意常数).

【例 4.21】　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1,t_2 为实常数. 试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

解析　考查基础解系的三大要素：(1)满足个数 $s=n-r(A)$，n 为 A 的列数；(2)满足齐次线性方程组的解；(3)线性无关.

由题设知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，齐次方程组当有非零解时，解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解. 下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0, \qquad (*)$$

把$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$代入整理得

$$(t_1k_1+t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2k_1+t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，由线性无关的定义知(＊)中其系数全为零，即

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0,\\ t_2k_1+t_1k_2=0,\\ \vdots\\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0.\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix}t_1&0&0&0&t_2\\ t_2&t_1&0&\cdots&0\\ 0&t_2&t_1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&t_2&t_1\end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq0,$$

故当$\begin{cases}s=2n, & t_1\neq\pm t_2,\\ s=2n+1, & t_1\neq -t_2\end{cases}$时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也是方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系.

【例 4.22】 设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是四阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若$[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系可为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

解析

易知$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系有3个线性无关的向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解.又因为$[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一个基础解系，即$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.故选(D).

题型五：两个线性方程组的公共解

魔研君点睛

求解线性方程组公共解的问题，不论是齐次线性方程组还是非齐次线性方程组，其处理思路是一样的，常用的主要有三大类方法：

1. 方程联立法(应用于两个线性方程组都已知的情形)

将两个线性方程组联立形成一个新的线性方程组求解，即将$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1$和$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}_2$联立成新的线性方程组$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1,\\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}_2\end{cases}$进行求解.新的线性方程组等价于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}$.

2. 代入求解法(适用于一个方程组已知，另一个通解已知或转化为该情况的类型)

将通解已知的线性方程组其通解代入另一个线性方程组中，确定任意常数的表达式，回代通解中得到结果，即为求公共解结果.

3. 通解联立法(适用于两个通解均已知或转化为该情况的类型)

联立两个方程组的通解，得到其中一个通解中任意常数的表达式，回代入该通解中得到结果，即为求公共解结果.

【例 4.23】 设齐次线性方程组：

$$\text{Ⅰ}:\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}\quad \text{Ⅱ}:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

求：(1) 方程组Ⅰ与方程组Ⅱ的基础解系；

(2) 方程组Ⅰ与方程组Ⅱ的公共解.

解析　(1) 先求方程组Ⅰ的基础解系.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix},$$

则基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm T}$和$\boldsymbol{\xi}_2=[-1,1,0,1]^{\mathrm T}$.

再求方程组Ⅱ的基础解系.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix},$$

则基础解系为$\boldsymbol{\xi}_3=[0,1,1,0]^{\mathrm T}$和$\boldsymbol{\xi}_4=[-1,-1,0,1]^{\mathrm T}$.

(2) 两个方程组均已知，利用方程联立法求解. 方程组Ⅰ：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与方程组Ⅱ：$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的公共解就是方程组$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，故对$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$进行初等行变换，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-r_2,\ r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则公共解的基础解系为$\boldsymbol{\xi}=[-1,1,2,1]^{\mathrm T}$，通解为$k\boldsymbol{\xi}$，$k$为任意常数.

魔研君点睛

本题第(2)问也可以按照通解联立法和代入求解法两种方法进行求解.

【通解联立法】

已知方程组Ⅰ的通解为$k_1[0,0,1,0]^{\mathrm T}+k_2[-1,1,0,1]^{\mathrm T}=[-k_2,k_2,k_1,k_2]^{\mathrm T}$，方程组Ⅱ的通解为$k_3[0,1,1,0]^{\mathrm T}+k_4[-1,-1,0,1]^{\mathrm T}=[-k_4,k_3-k_4,k_3,k_4]^{\mathrm T}$，故令两通解相等，则$\begin{cases}-k_2=-k_4,\\k_2=k_3-k_4,\\k_1=k_3,\\k_2=k_4\end{cases}\Rightarrow 2k_2=k_1$. 将$k_1=2k_2=2k$代入方程组Ⅰ的通解中，则公共解为

$$2k[0,0,1,0]^{\mathrm T}+k[-1,1,0,1]^{\mathrm T}=k[-1,1,2,1]^{\mathrm T}，其中 k 为任意常数.$$

【代入求解法】

已知方程组Ⅰ的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1[0,0,1,0]^{\mathrm T}+k_2[-1,1,0,1]^{\mathrm T}=[-k_2,k_2,k_1,k_2]^{\mathrm T},$$

即 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2\\k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

将 $x_1=-k_2,x_2=k_2,x_3=k_1,x_4=k_2$ 代入方程组Ⅱ：$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\k_2-k_1+k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=2k_2$，代入方程组Ⅰ的通解，则 $x=[-k_2,k_2,2k_2,k_2]^T=k_2[-1,1,2,1]^T$（$k_2$ 为任意常数）即为公共解.

【例 4.24】 已知齐次线性方程组

$$\text{Ⅰ}:\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3-x_4=0,\\x_1-x_3+ax_4=0,\end{cases}\quad \text{Ⅱ}:\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+x_4=0,\\3x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+3x_2+bx_4=0.\end{cases}$$

问 a,b 为何值时，方程组Ⅰ与方程组Ⅱ有非零公共解，并求出全部非零公共解.

解析 可求出方程组Ⅰ的通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-4\\a+\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，并把此通解代入方程组Ⅱ，

得新方程组 $\begin{cases}-3k_1+\left(2a+\frac{5}{2}\right)k_2=0,\\-3k_1+\left(\frac{3}{2}+b\right)k_2=0,\\-ak_2=0.\end{cases}$

对此讨论，可得当 $a=0,b=1$ 时，方程组有非零解，此时，两个方程组有非零公共解. 非零公共解为 $x=k[5,-7,5,6]^T$，其中 k 为任意常数.

题型六：两个线性方程组的同解问题

魔研君点睛

1. $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解的充分必要条件是“两个线性方程组的系数矩阵的行向量组等价”.

2. $Ax=b_1$ 和 $Bx=b_1$ 同解的充分必要条件是“两个线性方程组的增广矩阵的行向量组等价”.

【例 4.25】 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\geqslant r(B)$；

② 若 $r(A)\geqslant r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$；

④ 若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是(　　).

(A) ①②　　(B) ①③

(C) ②④　　(D) ③④

解析

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $n-r(\boldsymbol{A})\leqslant n-r(\boldsymbol{B})$，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$，命题①成立.

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B})$，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，命题③成立. 故选(B).

【例 4.26】 已知齐次线性方程组

$$\text{Ⅰ}:\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\quad \text{Ⅱ}:\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

解析 由于方程组Ⅰ和方程组Ⅱ同解，所以二者的系数矩阵有相同的秩. 显然方程组Ⅱ的系数矩阵的秩小于 3，故方程组Ⅰ的系数行列式必为零，即

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=-a+2=0,$$

解得 $a=2$.

当 $a=2$ 时，方程组Ⅰ的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故方程组Ⅰ的一个基础解系为 $\boldsymbol{x}=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

将方程组Ⅰ的解代入方程组Ⅱ中，可得 $b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$. 当 $b=1,c=2$ 时，对方程组Ⅱ的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

显然此时两个方程组同解.

当 $b=0,c=1$ 时，对方程组Ⅱ的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

此时二者的解不相同.

综上所述，当 $a=2,b=1,c=2$ 时，方程组Ⅰ和方程组Ⅱ同解.

自测题精选

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关

2. 已知$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的两个不同解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是对应的齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的通解是（　　）.

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$

3. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系（　　）.

(A) 不存在　　(B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量　　(D) 含有三个线性无关的解向量

4. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表示为（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个等阶向量组　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个等秩向量组

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

5. 已知$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,t,1]^{\mathrm{T}}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解向量，其中$\boldsymbol{b}=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，则（　　）.

(A) 当$t=2$时，$r(\boldsymbol{A})=1$　　(B) 当$t=2$时，$r(\boldsymbol{A})=2$

(C) 当$t\neq2$时，$r(\boldsymbol{A})=1$　　(D) 当$t\neq2$时，$r(\boldsymbol{A})=2$

6. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$只有零解，则$\lambda$应满足的条件是________.

7. 若线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\x_2+x_3=a_2,\\x_3+x_4=-a_3,\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$有解，则常数$a_1,a_2,a_3,a_4$应满足条件________.

8. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&3\\3&6&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为________.

9. 设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的3个解，且秩$r(\boldsymbol{A})=3$，若$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=[2,-1,-4,-7]^{\mathrm{T}}$，则方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的通解为____________.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-1&3\\2&n&0\\m&-1&p\end{pmatrix}$，若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，则 $m=$________，$n=$________，$p=$________.

11. 设

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1+4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1.\end{cases}$$

求当 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解、无穷多解，并且在方程组有无穷多解时求其通解？

12. 设 $\boldsymbol{B}$ 是三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{B}$ 的每一列均为线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0,\\-3x_1+x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$

的解，求 λ，$r(\boldsymbol{B})$.

13. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\\vdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$$

其中 $a\neq0,b\neq0,n\geqslant2$. 试讨论 a,b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

14. 设四元齐次方程组Ⅰ为 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$ 且已知另一四元齐次线性方程组Ⅱ的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,-1,a+2,1]^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_2=[-1,2,4,a+8]^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求方程组Ⅰ的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时，方程组Ⅰ与方程组Ⅱ有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

15. 已知下列非齐次线性方程组.

$$\text{Ⅰ}:\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6,\\4x_1-x_2-x_3-x_4=1,\\3x_1-x_2-x_3=3;\end{cases}$$

$$
\text{Ⅱ}:\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ \qquad nx_2-x_3-2x_4=-11, \\ \qquad\qquad x_3-2x_4=-t+1. \end{cases}
$$

（1）求解方程组Ⅰ，用解出方程组的基础解系表示通解；

（2）当方程组Ⅱ中的参数 m,n,t 为何值时，方程组Ⅰ与方程组Ⅱ同解.

自测题解题参考

1. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解时，$r(\boldsymbol{A})=n$.

又 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{A})=$列秩$=n$，

故 $\boldsymbol{A}$ 列向量组线性无关. 故选(A).

2. 排除法. 对于(A)，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$不为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故不正确.

对于(C)，由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=2\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 不为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，故不正确.

对于(D)，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关性未知，则(D)不确定. 故选(B).

3. $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$

由于 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，因此 $r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，则 $r(\boldsymbol{A})=n$ 或 $n-1$.

又 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有 4 个不同解，则可知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，则 $r(\boldsymbol{A})=n-1$.

因此，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅含一个基础解系. 故选(B).

4. 对于(A)，与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的向量组的向量个数不一定为 3，故排除.

对于(B)，与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等秩的向量组同样个数不一定相等，则错误.

对于(D)，由于$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=0$，则$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关. 故选(C).

5. $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & t \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\alpha}_3=b$，则 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]$.

当 $t\neq 2$ 时，则 $\boldsymbol{X}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{b})=1$. 故选(C).

6. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq 0$，则 $\lambda\neq 1$.

7. 由题意知，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，故

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，即 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

8. $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&3\\3&6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

可知 $r(A)=2\Rightarrow r(A^*)=1$,则 $A^*x=0$有两个线性无关的解向量.

由 $A^*A=|A|E=0$,可得通解为 $k_1[1,2,3]^T+k_2[4,5,6]^T$,$k_1,k_2$ 为任意常数.

9. 因为 $r(A)=3$,则 $Ax=0$的基础解系有一个解向量.$\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_1$ 为 $Ax=0$的解,其中$\alpha_3-3\alpha_3+2\alpha_1=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$,则 $Ax=b$ 的通解为 $k[4,3,2,1]^T+[1,2,3,4]^T$,k 为任意常数.

10.

$$[A,B]=\begin{pmatrix}1&1&2&4&-1&3\\-1&2&1&2&n&0\\0&1&1&m&-1&p\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&4&-1&3\\0&1&1&m&-1&p\\0&0&0&6-3m&n+2&3-3p\end{pmatrix}.$$

若 $Az=B$ 有解,则 $r(A)=r(A,B)$,此时 $m=2,n=-2,p=1$.

11. $|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$.

(1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时,方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda=10$ 时,

$$[A,b]=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&-9&-9&-9\\0&0&0&27\end{pmatrix},$$

此时 $r(A)\neq r(A,b)$,故 $Ax=b$ 无解.

(3) 当 $\lambda=1$ 时,

$$[A,b]=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

此时 $r(A)=r(A,b)<3$,则 $Ax=b$ 有无穷多解.

故通解为 $k_1[-2,1,0]^T+k_2[2,0,1]^T+[1,0,0]^T$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

12. $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&1&\lambda\\3&-2&-1\end{pmatrix}$,可知$|A|=-\lambda-1$.

由于 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$有非零解$\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=-\lambda-1=0$，则 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系仅含一个解向量，则 $r(\boldsymbol{B})=1$.

13. 对系数矩阵(记为 $\boldsymbol{A}$)作初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b-a & & & a-b \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a=b(\neq 0)$时，$r(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

基础解系中含有 $n-1$ 个(未知数的个数－系数矩阵的秩)线性无关的解向量，取 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，分别取 $x_2=1,x_3=0,\cdots,x_n=0$；$x_2=0,x_3=1,\cdots,x_n=0$；$\cdots$；$x_2=0,x_3=0,\cdots,x_n=1$，得方程组 $n-1$ 个线性无关的解为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=[-1,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\xi}_{n-1}=[-1,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}},$$

即为其基础解系. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的全部解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$，其中 $k_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是任意常数.

(2) 当 $a\neq b$ 时，则

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b-a & & & a-b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a+(n-1)b & & & \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix},$$

故当 $a\neq b$ 且 $a\neq-(n-1)b$ 时，$|\boldsymbol{A}|=a+(n-1)b\neq 0$，$r(\boldsymbol{A})=n$，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$仅有零解.

当 $a\neq b$ 且 $a=-(n-1)b$ 时，$r(\boldsymbol{A})=n-1$，$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的同解方程组是

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0, \\ -x_1+x_3=0, \\ \vdots \\ -x_1+x_n=0. \end{cases}$$

基础解系中含有 1 个(用未知数的个数减去系数矩阵的秩)线性无关的解向量，取 x_1 为自由未知量，设 $x_1=1$，得方程组的 1 个非零解$\boldsymbol{\xi}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，即为其基础解系，故方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}\text{，其中 } k \text{ 是任意常数.}$$

14. (1) 对方程组 Ⅰ 的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

系数矩阵的秩为 2,故基础解系由 4−2 个线性无关解向量组成,选 x_3,x_4 为自由未知量,分别取 $x_3=1,x_4=0$ 及 $x_3=0,x_4=1$,求得方程组的两个线性无关解为

$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

由此可得方程组Ⅰ的基础解系为$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 由题设条件,根据齐次线性方程组的解的结构,方程组Ⅱ的通解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k_1-k_2\\-k_1+2k_2\\(a+2)k_1+4k_2\\k_1+(a+8)k_2\end{pmatrix}.$$

方程组Ⅰ与方程组Ⅱ有非零公共解,即方程组Ⅱ的一部分解也是方程组Ⅰ的解,把方程组Ⅱ的通解表达式代入方程组Ⅰ,整理后得

$$\begin{cases}(a+1)k_1=0,\\(a+1)k_1-(a+1)k_2=0.\end{cases}\qquad(*)$$

要使方程组Ⅰ、方程组Ⅱ有非零公共解,只需关于 k_1,k_2 的方程组(*)有非零解.

所以,当 $a\neq-1$ 时,由(*)式知 $k_1=k_2=0$,方程组Ⅰ与方程组Ⅱ无非零公共解.

当 $a=-1$ 时,无论 k_1,k_2 为何值,(*)式恒成立,方程组Ⅱ的通解满足方程组Ⅰ,即方程组Ⅱ的全部解都是方程组Ⅰ的解,故此时

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix}$$

是方程组Ⅰ、方程组Ⅱ的全部非零公共解(k_1,k_2 为不全为零的任意常数).

15. (1) 对方程组Ⅰ的增广矩阵作初等变换,有

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&-2&-6\\0&-5&-1&7&25\\0&-4&-1&6&21\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&-2&-6\\0&-1&0&1&4\\0&-4&-1&6&21\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&-2&-6\\0&-1&0&1&4\\0&0&-1&2&5\end{array}\right).$$

方程组Ⅰ对应齐次方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=0,\\-x_2+x_4=0,\\-x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

选 x_2 为自由未知量,取 $x_2=1$,求得对应齐次方程的基础解系为$\boldsymbol{\xi}=[1,1,2,1]^{\mathrm{T}}$,取自由未知量 $x_2=0$,求得非齐次方程的特解$\boldsymbol{\eta}^*=[-2,-4,-5,0]^{\mathrm{T}}$,故解方程组Ⅰ的通解为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^*$,其中 k 是任意常数.

（2）将方程组Ⅰ的通解

$$k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^{*}=k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}$$

代入方程组Ⅱ，整理得

$$\begin{cases}(m-2)(k-4)=0,\\(n-4)(k-4)=0,\\t=6.\end{cases}$$

因 k 是任意常数，故取 $m=2,n=4,t=6$，方程组Ⅰ的解全是方程组Ⅱ的解（与任意常数 k 无关）. 此时，方程组Ⅱ的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&-1&-5\\0&4&-1&-2&-11\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right).$$

显然 $r(\boldsymbol{B})=r(\overline{\boldsymbol{B}})=r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，故方程组Ⅰ、方程组Ⅱ有相同数量的解. 又由上述证明知，方程组Ⅰ的解全部是方程组Ⅱ的解，故当 $m=2,n=4,t=6$ 时，方程组Ⅰ与方程组Ⅱ同解.

第5章 方阵的特征值与特征向量

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量	数学一、二、三
2	理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法	数学一、二、三
3	掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质	数学一、二、三
4	了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法	数学一、二、三
5	了解正交矩阵的概念以其性质	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

本章在考研中占有举足轻重的地位，是考研的热点章节. 从近15年的考研真题角度上看，无论是主观题还是客观题，都会涉及本章的内容，所以请大家务必重视. 本章主要包含三个大方向的知识，即特征值与特征向量，相似对角化以及实对称矩阵的正交相似对角化. 其中，特征值与特征向量的定义与性质和相似对角化的方法与条件、一般矩阵与实对称矩阵相似对角化的区别与联系是复习的重点，一定要回归到最基本的定义性内容，重在理解，掌握套路，这样肯定可以轻松拿到这部分的分数！

必会基本内容

一、特征值、特征向量相关概念及性质

1. 特征值、特征向量相关概念

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在数 λ 及非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 λ 所对应的特征向量.

【注】 (1) 特征向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关.

(3) $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$

$$\Updownarrow$$

$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$

$$\Updownarrow$$

$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有非零解$\boldsymbol{\alpha}$

$$\Updownarrow$$

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$

其中$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程,$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵.

(4) n 阶矩阵的特征值有 n 个,可以为特征方程的重根,也可不为实数.

魔研君点睛

求数值型矩阵特征值及特征向量的步骤:

第 1 步:利用$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$;

第 2 步:将 λ_i 回代得特征矩阵$\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$,求解出齐次线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系,即为$\lambda_i$ 所对应的线性无关的特征向量.

小试牛刀

【例 5.1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值以及特征向量.

解析 第 1 步:利用特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求特征值λ.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-3\\-3&-3&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-2&\lambda-3&-3\\-3&-6&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-6)-18]$$

$$=(\lambda+1)\lambda(\lambda-9)=0,$$

则 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9$.

第 2 步:将 λ_i 回代得特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$,解线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$即可求得 λ_i 所对应的特征向量.

(1) 当 $\lambda_1=0$ 时,解方程组$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-1&-3\\-3&-3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可知基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,则 $\lambda_1=0$ 所对应的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1(k_1\neq0)$.

(2) 当 $\lambda_2=-1$ 时,解方程组$(-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-2&-2&-3\\-3&-3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

同理,基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,0]^T$,则$\lambda_2=-1$所对应的全体特征向量为$k_2\boldsymbol{\alpha}_2(k_2\neq0)$.

(3) 当$\lambda_3=9$时,解方程组$(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&-2&-3\\-2&8&-3\\-3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

同理,基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,2]^T$,则$\lambda_3=9$所对应的全体特征向量为$k_3\boldsymbol{\alpha}_3(k_3\neq0)$.

【例 5.2】 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}$的特征值以及特征向量.

解析 第1步:利用特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$求特征值$\lambda$.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0&-1\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\-1&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&\lambda^2-1\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\-1&0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&0&\lambda^2-1\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\-1&0&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\\-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda^2-1)(-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0,$$

则$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$.

第2步:将λ_i回代得特征矩阵$\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$,解线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$即可求得$\lambda_i$所对应的特征向量.

(1) 当$\lambda_1=\lambda_2=1$时,解方程组$(1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可知基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,1,0]^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,0,1]^T$,则$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的全体特征向量为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_1$,其中$k_1,k_2$为不全为零的任意常数.

(2) 当$\lambda_3=\lambda_4=-1$时,解方程组$(-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,

$$-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0&-1\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

同理,基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,-1,1,0]^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,0,1]^T$,则$\lambda_3=\lambda_4=-1$所对应的全体特征向量为$k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$,其中$k_3,k_4$为不全为零的任意常数.

2. 特征值、特征向量的性质

(1) 对角矩阵、上三角矩阵和下三角矩阵的特征值是主对角线元素.

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,则

① $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$,

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$;

② $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

(3) 若行列式 $|a\boldsymbol{E}+b\boldsymbol{A}|=0$,则 $\lambda=-\dfrac{a}{b}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于不同特征值的特征向量线性无关.

(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值 λ 至多有 k 个线性无关的特征向量,特别地,当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值时(没有重根),$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(6) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ,$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
λ	$\lambda+k$	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{\|\boldsymbol{A}\|}{\lambda}$	λ	λ
$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	不确定	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

其中 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为 n 次多项式,则 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n$,$a_n\neq0$.

小试牛刀

【例 5.3】 证明性质(6).

证明 根据已知条件 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ,λ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$,则可知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}. \qquad ①$$

(1) 根据题设可知 $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\alpha}$,将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 代入,则

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\alpha}=(\lambda+k)\boldsymbol{\alpha},$$

于是立即可得 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda+k$,特征值所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两边同乘 k,则 $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(k\lambda)\boldsymbol{\alpha}$,可知 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $k\lambda$,特征值所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(3) 对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$,则

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}, \qquad ②$$

故 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 λ^2,特征值所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$. 同理,再对②两边左乘 $\boldsymbol{A}$,则

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^3\boldsymbol{\alpha}, \qquad ③$$

可知 $\boldsymbol{A}^3$ 的特征值为 λ^3,特征值所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$. 依次类推,$\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 λ^k,特征值所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 由条件可知

$$(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{\alpha}=a_0\boldsymbol{\alpha}+a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}. \qquad ④$$

根据 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n$，以及(3)结论代入④，则有

$$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=a_0\boldsymbol{\alpha}+a_1\lambda\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_n\lambda^n\boldsymbol{\alpha}=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n)\boldsymbol{\alpha}=f(\lambda)\boldsymbol{\alpha},$$

则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda)$，特征值所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(5) 对 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$（根据题设 $\boldsymbol{A}$ 可逆），则 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，可知 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值不为零，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$. 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$，特征值所对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(6) 对 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$，则

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha},$$

即当 $\lambda\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$（此时 $\boldsymbol{A}$ 可逆）.

可知，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，特征值所对应的特征向量仍为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(7) 对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式进行处理，得

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|(\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|.$$

可知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 λ，但是特征值所对应的特征向量无从判断.

(8) 令 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$.

根据 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$

可知，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 的特征值为 λ，特征值所对应的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 证毕.

魔研君点睛

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 特征值的求解方法不能按照定义来求解. 这里根据两个同阶矩阵的特征多项式相等，从而推出两矩阵的特征值相等，即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\Rightarrow\lambda_A=\lambda_B$，但是所对应的特征向量无法做出判断.

(2) 证明中的常用矩阵、特征值、特征向量（除了 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）还满足线性叠加关系. 例如已知 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，所对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $[\boldsymbol{A}^*+f(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}^{-1}]\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+f(\lambda)+\frac{1}{\lambda}\right]\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{A}^*+f(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+f(\lambda)+\frac{1}{\lambda}$，所对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

【例 5.4】 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,−1，则 $|\boldsymbol{A}|=$________；$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为________；$(\boldsymbol{A}^*)^*$ 的特征值为________；$|(\boldsymbol{A}^*)^*|=$________；$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$特征作为________，$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$________（可逆/不可逆）.

解析 (1) $|\boldsymbol{A}|=1\times 2\times(-1)=-2$.

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_A：1,2,−1，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_A}$，则 λ_{A^*} 分别为 −2,−1,2.

(3) 同理，$(\boldsymbol{A}^*)^*$ 特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}^*|}{\lambda_{A^*}}$，其中 $|\boldsymbol{A}^*|=-2\times(-1)\times 2=4$，故 $(\boldsymbol{A}^*)^*$ 特征值分别为 −2,−4,2.

(4) $(\boldsymbol{A}^*)^*=-2\times(-4)\times 2=16$.

(5) $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 所对应特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_A}+3\lambda_A+2+\frac{1}{\lambda_A}$，即分别为 4,$\frac{15}{2}$,0.

(6) $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}|=0$，则填“不可逆”.

二、矩阵相似以及矩阵相似对角化

1. 矩阵相似概念及性质

(1) 定义：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，若存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，简记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(2) 性质：①相似具有反身性($\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$)，对称性($\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$)，传递性($\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$)；

② 相似矩阵具有相同特征值，但特征向量却不一定相同；例 5.2 中推导过，若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\lambda_{\boldsymbol{A}}=\lambda_{\boldsymbol{B}}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

魔研君点睛

1. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

(1) $\lambda_{\boldsymbol{A}}=\lambda_{\boldsymbol{B}}$；(2) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；(3) $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$；(4) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$；(5) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

【注】 这 5 条结论为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的必要条件，而非充分条件.

2. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；(2) $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$(若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 可逆)；(3) $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$；

(4) $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$($f(x)$ 为 x 的 n 次多项式).

2. 矩阵相似对角化(重点)

魔研君点睛

若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$(对角阵)，记 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}\ (\boldsymbol{P}\text{ 为可逆矩阵})$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}\ (\text{记 }\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n])$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n]=[\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n]$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{A\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,\cdots,n.$$

可以发现，相似对角化的结果 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值构成的，而使得相似对角化的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量作为每一列形成的，并且要求 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列次序与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 主对角线上的特征值排列次序一一对应.

(1) 相似对角化的条件

① n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量(充要条件).

魔研君点睛

单重特征值一定有 1 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 可否相似对角化只关注重根.

② n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量(充要条件).

③ 若 n 阶矩阵有 n 个不同特征值 $\Rightarrow n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化(充分条件).

(2) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化求解方法

第 1 步：利用 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

第 2 步：回代 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，解 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得到 λ_i 所对应的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$；

第 3 步：根据特征值、特征向量排列一一对应原则，写出 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$，令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，

则 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，此时 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(3) 利用相似对角化求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂.

若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，此时 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&&\\&\lambda_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^n\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 λ_i 所对应的特征向量.

小试牛刀

【例 5.5】 求一个可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$ 对角化，并求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解析 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&-2\\0&\lambda+3&-4\\0&-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+3&-4\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$，可得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$.

对 $\lambda_1=1$，解方程 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-4&-2\\0&4&-4\\0&-4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2=5$，解方程 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-4&-2\\0&8&-4\\0&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向

量$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=-5$,解方程$(5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由 $5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&4&2\\0&2&4\\0&4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$,可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$. 由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$,从而 $\boldsymbol{A}^{100}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1+5^{100}\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}$.

三、引入知识(正交化、单位化、正交矩阵)

1. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,则可利用施密特正交化构造与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 等价的正交向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,方法如下:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1},$$

上面过程称为施密特正交化.

2. 令$\boldsymbol{\beta}_1^0=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\beta}_2^0=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^0=\frac{\boldsymbol{\beta}_n}{\|\boldsymbol{\beta}_n\|}$,此过程称为单位化(或规范化).

3. 正交矩阵

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{Q}$,若 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{Q}$ 称为正交矩阵.

【注】 对于正交阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,则 $\boldsymbol{Q}$ 一定可逆.

魔研君点睛

令 $Q=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{pmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^T\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$，则

$$Q^TQ=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)\\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

对于正交阵 Q，可知：(1)列向量彼此正交；(2)列向量均为单位向量.

小试牛刀

【例 5.6】 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解析 令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},$$

则正交化后得到

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

四、实对称矩阵相似对角化

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是实数；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量必正交；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量，即 $r(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-k$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，并且存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}\boldsymbol{A}Q=Q^T\boldsymbol{A}Q=\boldsymbol{\Lambda}$.

魔研君点睛

如何将一个 n 阶实对称矩阵正交相似对角化?

第 1 步:利用 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

第 2 步:回代 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,解 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得到 λ_i 所对应的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$;

第 3 步:再将 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所对应的线性无关特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 进行施密特正交化得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$;

第 4 步:再将正交化结果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 进行单位化得 $\boldsymbol{\beta}_1^0,\boldsymbol{\beta}_2^0,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^0$;

第 5 步:一一对应写出结果,令正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\beta}_1^0,\boldsymbol{\beta}_2^0,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^0]$,则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

【例 5.7】 求一个正交矩阵,将对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$ 对角化.

解析 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}$

$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4\\ -2 & \lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$,得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda_3=10$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=1$,解方程 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=10$,解方程 $(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由 $10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$.

正交化：令$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$.

单位化：令$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}，则\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}.$$

考试题型与解析

题型一：数值型矩阵的特征值和特征向量

魔研君点睛

此类问题一般都是两个步骤：第一步利用特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$求出特征值$\lambda_i$；第二步将$\lambda_i$回代，利用$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$求解$\lambda_i$所对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_i$.

除此之外，当矩阵以及特征向量均已知时，利用定义求解也是一种非常重要的基本思路，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$.

【例 5.8】 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，试求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量，并求矩阵$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值，其中$\boldsymbol{E}$是三阶单位矩阵.

解析 $\boldsymbol{A}$的特征方程是

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1&\lambda-1&0\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+(-1)r_2}(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&\lambda+1&2\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&\lambda+1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&\lambda+3&2\\0&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0,$$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$.

当$\lambda=1$时，求$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，

$$E-A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则其一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\lambda=1$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\xi}_1(k_1\neq0)$.

当 $\lambda=-5$ 时，求$(-5E-A)x=\mathbf{0}$的基础解系，得

$$-5E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&-2\\-2&-4&2\\-2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

则其一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\lambda=-5$ 的特征向量是 $k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_2\neq0)$. $E+A^{-1}$的特征值为 $2,2,\frac{4}{5}$.

【例 5.9】 已知$\boldsymbol{\alpha}=[1,a,3]^{\mathrm{T}}$ 是 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&b\\4&5&-4\\-6&-6&7\end{pmatrix}$的伴随矩阵 A^* 的特征向量，求 a，b 的值，并求 A^* 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值μ .

解析　显然$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$也是 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&b\\4&5&-4\\-6&-6&7\end{pmatrix}$特征向量，则有

$$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&-2&b\\4&5&-4\\-6&-6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix},$$

则 $\begin{pmatrix}-1-2a+3b\\5a-8\\15-6a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\a\lambda\\3\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-1-2a+3b=\lambda,\\5a-8=a\lambda,\\15-6a=3\lambda,\end{cases}$ 可得 $a=2,b=2,\lambda=1$ 或者 $a=-2,b=2,\lambda=9$.

当 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow a=2,b=2,\lambda=1$ 时，A^* 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值 $\mu=\frac{|A|}{\lambda}=9$.

当 $a=-2,b=2,\lambda=9$ 时，A^* 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值 $\mu=\frac{|A|}{\lambda}=1$.

题型二：抽象型矩阵的特征和特征向量

魔研君点睛

抽象型矩阵的处理思路，主要有三点：

（1）利用定义法 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$，确定特征值和特征向量.

（2）常见的矩阵的特征值、特征向量的关系，具体如下表.

A	$A+kE$	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^{T}	$P^{-1}AP$
λ	$\lambda+k$	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	不确定	$P^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

(3) 根据特征方程确定特征值，分两种类型：

① 若 $|aA+bE|=0$，则 $\lambda=-\dfrac{b}{a}$ 是 A 的一个特征值；

② 若 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，则 $\lambda_A=\lambda_B$.

【例 5.10】 设 $A,A+E,A-2E$ 均为三阶不可逆矩阵，则 $|3A-E|=($　　$)$.

(A) 0　　(B) 8　　(C) 14　　(D) 20

解析

因为 $A,A+E,A-2E$ 均不可逆，所以 $|A|=|A+E|=|A-2E|=0$，所以 A 的特征值为 $0,-1,2$，从而 $3A-E$ 的特征值为 $-1,-4,5$，于是 $|3A-E|=-1\times(-4)\times5=20$. 故选(D).

【例 5.11】 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$，则行列式 $\left|\left(\dfrac{1}{2}A^2\right)^{-1}+12A^*-E\right|=$________.

解析　$|A|=\prod\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=\dfrac{1}{12}$，$A^*$ 对应的特征值分别为 $\dfrac{|A|}{\lambda_i}=\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{4}$，$A^2$ 对应的特征值分别为 $\lambda_i^2=\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9}$，$\left(\dfrac{A^2}{2}\right)^{-1}$ 对应的特征值分别为 $8,8,18$，所以 $f(A)=\left(\dfrac{A^2}{2}\right)^{-1}+12A^*-E$ 对应的特征值分别为 $9,9,20$，所以 $\left|\left(\dfrac{1}{2}A^2\right)^{-1}+12A^*-E\right|=9\times9\times20=1620$.

【例 5.12】 设 A 为四阶实对称矩阵，且满足 $A^2-2A=O$，且 $r(A)=2$，则 A 的特征值为________.

解析　设 A 的特征值为 λ，则 A^2-2A 的特征值为 $\lambda^2-2\lambda$，由于零矩阵的所有特征值为 0，则 $\lambda^2-2\lambda=0$，故 $\lambda(\lambda-2)=0$，则 $\lambda=0$ 或 2，即 A 的特征值为 0 或 2. 由于 A 为实对称矩阵，则 A 一定可以相似对角化，即 $A\sim\Lambda\Rightarrow r(A)=r(\Lambda)=2$，故 A 的特征值为 $2,2,0,0$.

魔研君点睛

零矩阵的所有特征值都是 0，这种思路的问题可以延伸至很多同类考题，比如 $A^2=A$，$A^3=O$ 等，要根据满足的等式来求解特征值的问题.

【例 5.13】 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ 都是非零向量，记矩阵 $A=\boldsymbol{\alpha\beta}^T$.

(1) 求 A 的特征值、特征向量；

(2) 讨论 A 可否相似对角化，为什么？

魔研君点睛

本题矩阵 A 是字母型矩阵，要从定义出发求其特征值，由于

$$A=\boldsymbol{\alpha\beta}^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix},$$

若用特征方程法将几乎无法求解.

解析　(1) 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行(列)元素对应成比例，从而 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$. 又因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是非零向量，故 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个元素不为 0，从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，因此 $r(\boldsymbol{A})=1$，$|\boldsymbol{A}|=0$，由此可知，0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，且其重数

$$k\geqslant n-r(0\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})=n-1.$$

对于 $\lambda_1=0$，求解方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得属于 $\lambda_1=0$ 的特征向量，由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量，不妨设 $a_1b_1\neq 0$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left[-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left[-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right]^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left[-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right]^{\mathrm{T}}.$$

于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\quad k_1,k_2,\cdots,k_n \text{ 是不全为零的任意常数.}$$

又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}$，可知 $\lambda_2=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\ (=\mathrm{tr}\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，属于 $\lambda_2=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}$，k 是不为零的任意常数.

(2) 由(1)可知，当 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0(n 重根)；当 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0($n-1$ 重根)和 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ (或 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$). 而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化取决于其重特征值的线性无关的特征向量的个数，因此

当 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$ 时，$n-r(\boldsymbol{A})=n-1<$ 重数，$\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化；

当 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq 0$ 时，$n-r(\boldsymbol{A})=n-1=$ 重数，$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

题型三：矩阵相似对角化的求解与判定

魔研君点睛

这部分往往涉及两个方面：一个是矩阵相似对角化的求解，即需要求出使得相似对角化的可逆矩阵；另外一种就是可否相似对角化的问题.

(1) 求解问题. 需要求解出特征值和特征向量，再用特征值构成相似对角化的结果(对角矩阵)，用特征向量构成可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(2) 判定问题. 回归相似对角化的条件(两个充要条件、一个充分条件)，其中最常用的是“r 重特征值具有 r 个线性无关的特征向量”. 注意：这里只需要进行判别“所有重根特征值的重数和对应特征向量线性无关个数是否相等”即可，不需要将特征向量求出.

【例 5.14】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ a+5 & -a-2 & 2a \end{pmatrix}$，问 a 为何值时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解析　$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -4 \\ -a-5 & a+2 & \lambda-2a \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)[\lambda-(2a-1)].$

当 $2a-1\neq 1,2$，即 $a\neq 1,\frac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

当 $2a-1=1$，即 $a=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 1(二重)和 2，$\lambda=1$ 时，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&-4\\6&3&2\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，从而 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量只有一个，不可对角化.

当 $2a-1=2$，即 $a=\frac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 1 和 2(二重). 又 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，从而 $\boldsymbol{A}$ 也不可对角化.

综上，当 $a\neq 1,\frac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

魔研君点睛

本题是个判别性问题，我们并不需要去求解出具体的特征向量再看线性无关的个数，而仅仅需要能从基础解系角度判别即可！

比如重根是 1，那么思路就应该是看看二重特征值和对应特征向量线性无关个数是否是两个，也就是 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是否有两个线性无关的基础解系，即

$$s=n-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\overset{?}{=}2.$$

从而，思路转化为了看 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 是否为 1，题目一下就简单了很多！

【例 5.15】 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\b&\cdots&b&1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解析 (1) 当 $b\neq 0$ 时，

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&b&\cdots&b\\b&1-\lambda&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\b&\cdots&b&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=[1-\lambda+(n-1)b](1-\lambda-b)^{n-1},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

对 $\lambda_1=1+(n-1)b$，

$$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}(1-n)b&b&\cdots&b\\b&(1-n)b&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\b&\cdots&b&(1-n)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1-n&1&\cdots&1\\1&1-n&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&1-n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1-n & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & n-1\\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ & n & & & -n\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & n & -n\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ & 1 & & & -1\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

解得$\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的属于λ_1 的全部特征向量为

$$k\boldsymbol{\xi}_1=k[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}},\quad k \text{ 为不为零的任意常数.}$$

对 $\lambda_2=1-b$,

$$\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}b & b & \cdots & b\\ b & b & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=[1,-1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_3=[1,0,-1,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\xi}_n=[1,0,0,\cdots,-1]^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的属于λ_2 的全部特征向量为

$$k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{\xi}_n,\quad k_2,k_3,\cdots,k_n \text{ 是不全为零的常数.}$$

当 $b=0$ 时,

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & & & \\ & 1-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^n,$$

特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$,任意非零列向量均为特征向量.

(2) 当 $b\neq0$ 时,$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量,令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}.$$

当 $b=0$ 时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,对任意可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,均有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}.$$

【例 5.16】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值$-1,1$ 的特征向量,向量$\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解析 (1) 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值$-1,1$ 的特征向量,所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$,

$A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}, \tag{①}$$

则等式两侧左乘 A 得

$$k_1A\boldsymbol{\alpha}_1+k_2A\boldsymbol{\alpha}_2+k_3A\boldsymbol{\alpha}_3=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

整理可得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0. \tag{②}$$

由①和②两式相减可得 $2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，所以 $k_1=k_2=0$. 再由①式可知 $k_3=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以 P 可逆.

因为

$$AP=A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【例 5.17】 设 A 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维列向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$，若

$$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\quad A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\ A\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

(1) 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) 求 A 的特征值、特征向量.

解析

(1) 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}, \tag{*}$$

由于 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,A\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，则用 A^{n-1} 左乘(*)式，得到 $k_1\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，由于$\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$，所以 $k_1=0$.

再依次用 $A^{n-2},A^{n-3},\cdots$ 左乘(*)式，得到 $k_2=k_3=\cdots=k_n=0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(2) 由条件有

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\mathbf{0})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&1&\ddots&&\\&&\ddots&&\\&&&1&0\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)B.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$是可逆的，从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)^{-1}A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=B,$$

则 $A\sim B$.

而 B 的特征值全为 0，根据相似矩阵有相同的特征值，则 A 的特征值全为 0.

又因为 $r(A)=r(B)=n-1$，所以 $AX=\mathbf{0}$的基础解中有 $n-r(A)=1$ 个向量. 因为 $A\boldsymbol{\alpha}_n=$

$\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_n,k\neq 0$.

【例 5.18】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(3) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解析

(1) 由条件有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$，可知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，可知 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，所以 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，由此可求 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$，得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

(3) 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[-2,0,1]^{\mathrm{T}}$. 对应于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$. 因为 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})$，所以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ 即为所求.

题型四：两个矩阵的相似判定

魔研君点睛

方法 1　相似的必要条件往往是处理含参矩阵相似的基本方法. 相似的必要条件如下：

若 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$，则 (1) $\lambda_{\boldsymbol{A}}=\lambda_{\boldsymbol{B}}$；(2) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；(3) $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$；(4) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$；(5) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

方法 2　相似的传递性

第 1 步：首先分别求两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_{\boldsymbol{A}},\lambda_{\boldsymbol{B}}$. 若 $\lambda_{\boldsymbol{A}}\neq\lambda_{\boldsymbol{B}}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似；若 $\lambda_{\boldsymbol{A}}=\lambda_{\boldsymbol{B}}$，则需要进一步判断.

第 2 步：再分别判定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 能否相似对角化. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可相似对角化，则 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$，否则不相似.

【例 5.19】 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}.$$

(1) 求 x 和 y 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解析 (1) 因为 $\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$,故其特征多项式相同,即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y).$$

令 $\lambda=0$,得 $2(x-2)=2y$;令 $\lambda=1$,得 $2\times(-2)=-2(1-y)$.

由上两式解出 $y=-2$ 与 $x=0$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时,由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&-2\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$,得到属于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=2$ 时,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\begin{pmatrix}4&0&0\\-2&2&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得到属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-2$ 时,由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-2&-2\\-3&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得到属于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$.

那么,令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

【例 5.20】 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1\\1&\cdots&1&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

证明 不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1\\1&\cdots&1&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&-1\\-1&\cdots&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&\lambda-1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&-1\\1&\cdots&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

故特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&&&-1\\&\ddots&&-2\\&&\lambda&\vdots\\&&&\lambda-n\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

故特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，所以必可以对角化，相似于矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. 对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，当 $\lambda=0$ 时，$r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=1$，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 0 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以对角化为 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，所以二者相似. 证毕.

【例 5.21】 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(　　).

(A) $a=0,b=2$　　(B) $a=0,b$ 为任意常数

(C) $a=2,b=0$　　(D) $b=0,a$ 为任意常数

解析　不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2],$$

所以当 $a=0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $2,b,0$，且 b 可为任意常数，显然对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值分别为 $2,b,0$. 故选(B).

题型五：实对称矩阵相似对角化

魔研君点睛

实对称矩阵的相似对角化，重点在于相似对角化的基础上将可逆矩阵化为正交矩阵. 回到正交矩阵的两大特点：

(1) 正交矩阵的每一列的列向量都是彼此正交的；

(2) 正交矩阵每一列的列向量都是单位向量.

可逆矩阵的列向量都是线性无关的，只需要按照施密特正交化和单位化，即可化为正交矩阵.

【例 5.22】 已知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=-6,\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=(0,-12\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 0 & -24 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

求：(1) $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量；(2) $\boldsymbol{A}$.

解析　(1) 记 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2],\quad \boldsymbol{C}=[0\quad -12\boldsymbol{\alpha}_2],\quad \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2].$$

由题设 $AB=C$ 知 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=-12\alpha_2$，所以$\alpha_1,\alpha_2$ 是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1=0, \lambda_2=-12$ 的特征向量.

设 λ_3 是第 3 个特征值，利用题设可得 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=-6$，所以 $\lambda_3=6$.

设 $\lambda_3=6$ 对应的特征向量为$\alpha_3=[x_1,x_2,x_3]^T$，由 $\lambda_3\neq\lambda_2, \lambda_3\neq\lambda_1$，知$\alpha_3\perp\alpha_2, \alpha_3\perp\alpha_1$. 即 $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3=0,\end{cases}$ 解得$[x_1,x_2,x_3]^T=t[1,-1,1]^T$. 取$\alpha_3=[1,-1,1]^T$，将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得 3 个两两正交的单位向量组$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,-1]^T, \eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,2,1]^T, \eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^T$.

(2) 记 $U=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则 U 为正交矩阵，且 $U^TAU=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-12&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，则

$$A=U\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-12&0\\0&0&6\end{pmatrix}U^T=\begin{pmatrix}0&-6&0\\-6&-6&-6\\0&-6&0\end{pmatrix}.$$

【例 5.23】 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量$\alpha_1=[-2,2,-1]^T, \alpha_2=[0,-1,1]^T$ 是线性方程组 $Ax=0$的两个解.

(1) 求 A 的特征值与特征向量；

(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$；

(3) 求 A 及$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为三阶单位矩阵.

解析 (1)由 A 的每行元素之和为 3，得 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$，故$\alpha_0=[1,1,1]^T$ 是 A 的特征向量，特征值为 3. 又α_1,α_2 都是 $Ax=0$的解，则它们是 A 的属于 0 特征值的特征向量. 由于α_1,α_2 线性无关，所以 $\lambda=0$ 为二重特征根，故 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $k_0\alpha_0, k_0\neq0$，属于 0 的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 不全为零.

(2) 因为 A 为实对称矩阵，所以α_0 与α_1,α_2 正交，故只需将α_1,α_2 正交化，再单位化得

$$\eta_1=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,\quad \eta_2=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^T.$$

再将α_0 单位化得$\eta_0=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$. 令 $Q=(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$，则 Q 是正交矩阵，并且

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(3) $Q^TAQ=\Lambda$，其中 $Q^T=Q^{-1}$，则

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E})^6=\left[\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right]^6=\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{\Lambda}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{Q}\left[\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right]^6\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}^6\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\boldsymbol{E}.$$

自测题精选

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵($n\geqslant 2$),λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量,考虑以下命题:

① 若 $\lambda_1=\lambda_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必线性相关;

② 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必线性无关;

③ 若 $\lambda_1=\lambda_2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的特征向量;

④ 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$,且 $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_3 的特征向量.

其中正确的个数有(　　).

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{pmatrix}$ 的特征向量,则(　　).

(A) $a=-2,b=6$　(B) $a=2,b=-6$

(C) $a=-2,b=-6$　(D) $a=2,b=6$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　(A) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

5. 设三阶矩阵 A 与 B 相似，且 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\0&1&t\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $t\neq 0$ 时，$r(A)=3$，A 可相似对角化

(B) $t\neq 0$ 时，$r(A)=3$，A 不可相似对角化

(C) $t=0$ 时，$r(A)=2$，A 可相似对角化

(D) $t=0$ 时，$r(A)=2$，A 不可相似对角化

6. 设 A 为二阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的二维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为________.

7. 矩阵$\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$的非零特征值是________.

8. 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则矩阵 AA^* 的全部特征值为________，特征向量为________.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$. 若 A 与 B 相似，则 $a=$________，$b=$________.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}k&2&2\\2&k&-2\\2&-2&k\end{pmatrix}$，已知 1 是 A 的二重特征值，则 $k=$________；矩阵 A 的属于 1 的两个线性无关的特征向量为________. 若 $\beta=(2,1,1)^T$，则 $A^n\beta=$________.

11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$. 问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并求出 P 和相应的对角阵.

12. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=[1,-1,1]^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为三阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量；

(2) 求矩阵 B.

13. 设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$. 已知 $r(A)=2$，求 A 的全部特征值.

自测题解题参考

1．分别对4个命题进行讨论，可知：

(1) 若$\lambda_1=\lambda_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$属于同一特征值的特征向量，当$r(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})<n-1$时，即$\lambda_1$为矩阵的重特征值，线性无关的特征向量可能多于一个，故命题①不正确.

但$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2$，故$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，当$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$一定是矩阵的属于$\lambda_1$的特征向量，所以命题③是正确的.

(2) 若$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$属于不同特征值的特征向量，必然无关，所以命题②是正确的；对于命题④，假设$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$是矩阵属于$\lambda_1+\lambda_2$的特征向量，则有$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\lambda_1+\lambda_2)(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，得到$(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_3-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，由于$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$属于不同特征值的特征向量，必然无关，得到$\lambda_3=\lambda_1=\lambda_2$，与条件矛盾，故命题④不正确.

综上所述，只有两个命题是正确的，故选择(B).

2．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\10+a\\-2b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，则$\lambda=-4$，$a=-2$，$b=6$. 故选(A).

3．设$\boldsymbol{A}$的特征值为λ，则$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda^2+\lambda$.

由于$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，则$\lambda^2+\lambda=0$，即$\lambda=0$或$-1$.

又$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，故$\boldsymbol{A}$一定可以相似对角化，则$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=-3$，则

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}.$$故选(D).

4．由$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$知，存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

则

① $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

② $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$；

③ $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$，则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

故(A)，(B)，(D)均正确，即选(C).

5．当$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\0&1&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\0&0&t\end{pmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-t).$$

当$t=0$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，且$\boldsymbol{B}$有3个不同的特征值，则$\boldsymbol{B}$一定可以相似对角化，即

$B \sim \Lambda$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$. 故选(C).

6. $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$，由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

又 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)=0$，可知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=1,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 和 1.

7. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\0&\lambda&\lambda\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda&0&2\\0&0&\lambda\\2&4-\lambda&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4)=0,$$

则 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$，故非零特征值为 4.

8. (1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，则可知 $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，且为 n 重特征值.

(2) 对于 $\lambda=|\boldsymbol{A}|$，有

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}.$$

显然任何 n 维非零向量均为 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，则特征向量可表示为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}，其中 k_1,k_2,\cdots,k_n 为任意常数.$$

9. 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则可知

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\Rightarrow-2+a+1=-1+2+b,$$

则 $a=b+2$. 而且 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，取 $\lambda=-1$，则 $|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，可得 $2a=0$，则 $a=0,b=-2$.

10. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-k&-2&-2\\-2&\lambda-k&2\\-2&2&\lambda-k\end{vmatrix}=(\lambda-k-2)^2(\lambda-k+4)=0,$

则 $\lambda_1=\lambda_2=k+2,\lambda_3=k-4$.

由题意知 $k+2=1$，即 $k=-1$.

解方程 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系：$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则属于特征值 1 的两个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$.

由于 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$，则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\beta}$.

11. 令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\\lambda+1&\lambda+1&-k\\\lambda-3&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=$
$(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

(1) 当 $\lambda_1=1$ 时，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\k&2&-k\\-4&-2&4\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2) 当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&-2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}$.

当 $k\neq0$ 时，$r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，只有一个特征向量，故此时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

当 $k=0$ 时，$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&-2\\0&0&0\\-4&-2&2\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，故可对角化.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ 可逆，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

12. (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$.

因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量.

又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的另外两个特征值分别为

$$\mu_2=\lambda_2^5-4\lambda_2^3+1=1,\quad \mu_3=\lambda_3^5-4\lambda_3^3+1=1.$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，不妨设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 μ_2,μ_3 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$，则 $x_1-x_2+x_3=0$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$ 为特征值 $\mu_2=\mu_3=1$ 对应的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=-2$，对应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=k_1[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$（$k_1$ 为非零常数）；$\mu_2=\mu_3=1$，对应的特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$

$=k_2[1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_3[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$($k_2,k_3$ 不全为零).

(2) 利用施密特正交化,令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\beta}_3=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right]^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[-1,1,2]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$,所以有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 所对应特征值为 λ,则 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}$ 所对应特征值为 $\lambda^2+2\lambda$.

又 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda^2+2\lambda=0$,即 $\lambda=0$ 或 -2.

而 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化,即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=2$,得 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$,$\lambda_3=0$.

第 6 章 二次型

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理	数学一、二、三
2	掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形	数学一、二、三
3	理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

本章依然是考纲的重点内容，一般考题都是以大题形式出现，所以大家务必要在这个部分拿到高分. 本章的核心考点主要有三个：(1)二次型的基本概念；(2)二次型标准形的化法；(3)正定二次型的判定. 相对而言，(2)中的内容显得最为重要. 二次型研究的主要是实对称矩阵的问题，结合特征值和特征向量的知识，利用正交变换进行处理. 因此，第 5 章的实对称矩阵的正交相似对角化的内容将会在这里发挥很大的作用.

必会基本内容

一、二次型的概念以及矩阵表示

定义 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数称为 n 元二次型(考研数学中均为实二次型，即系数均为实数).

(1) 二次型的一般形式：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+\\&a_{21}x_1x_2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+\cdots+\\&a_{n1}x_1x_n+a_{n2}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2,\end{aligned}$$

矩阵表达形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

简记为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

上述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,称为二次型所对应的矩阵.一个 n 元二次型可以确定唯一的 $\boldsymbol{A}$,同时,一个实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也有唯一的二次型与之对应.因此,二次型所对应的矩阵与二次型本身具有一一对应的关系,性质也是如此,比如:

① 二次型的秩等于对应矩阵的秩,即 $r(f)=r(\boldsymbol{A})$;

② 两个二次型对应矩阵等价,则两个二次型等价;

③ 两个二次型对应矩阵合同,则两个二次型合同.

(2) 二次型的标准形:只含有平方项的二次型称为二次型的标准形.形式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$,其中 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可为正,可为负,也可为零.正平方项的项数称为二次型的正惯性指数,记为 p;负平方项的项数称为二次型的负惯性指数,记为 q,则 $r(f)=r(\boldsymbol{A})=p+q$.

标准形的矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

则标准形二次型所对应矩阵为对角矩阵.一般情况下,二次型的标准形不是唯一的,与所作的合同变换有关,但是系数不为零的平方项个数由 $r(\boldsymbol{A})$ 唯一确定.

(3) 二次型的规范形:只含有平方项而且平方项前系数只为 $1,-1,0$ 的二次型称为二次型的规范形,形式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$,其中,$r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩,p 为正惯性指数,$r-p$ 为负惯性指数,且规范形唯一.

二、二次型化为标准形

1. 二次型的可逆线性变换法

对于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,如果 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵,则称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为可逆线性变换.

设 n 元二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,经过可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 得到

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}{=}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=g(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

如果 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$.

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$，故将二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形的核心在于找寻可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，将 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 化为对角矩阵.

最特殊地，若 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 称为正交变换，此时，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，即二次型必可用正交变换法化为标准形.

二次型化标准形的方法有：配方法、正交变换法.

2. 矩阵合同及合同变换

(1) 定义：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同，简记为 $\boldsymbol{A}\backsimeq\boldsymbol{B}$.

(2) 性质：合同具有反身性($\boldsymbol{A}\backsimeq\boldsymbol{A}$)，对称性($\boldsymbol{A}\backsimeq\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\backsimeq\boldsymbol{A}$)，传递性($\boldsymbol{A}\backsimeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\backsimeq\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\backsimeq\boldsymbol{C}$).

魔研君点睛

任一二次型都可通过可逆线性变换法化为标准形. 同理，任一实对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

(3) 两个实对称矩阵合同的充分必要条件

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}\backsimeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同正、负惯性指数.

(4) 惯性定理：对于任何一个二次型，不论选用怎样的合同变换使其化为仅有平方项的标准形，其正、负惯性指数均不变.

3. 如何化二次型为标准形

(1) 正交变换法

对于任意一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使得

$$\begin{aligned} f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} \\ &=[y_1,y_2,\cdots,y_n]\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2. \end{aligned}$$

其中，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量依次是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的正交单位特征向量.

魔研君点睛

正交变换法的核心就是将实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交相似对角化(第 5 章)，即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，相似对角化结果$\boldsymbol{\Lambda}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值构成，故正交变换法化为的标准形平方项的系数为特征值，处理思路如下.

第 1 步：写出二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 对应的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$；

第 2 步：利用特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

第 3 步：λ_i 回代求解 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 λ_i 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$；

第 4 步：将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 进行施密特正交化得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$（只需要将相同特征值所对应的特征向量进行正交化）；

第 5 步：将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 进行单位化得 $\boldsymbol{\beta}_1^0,\boldsymbol{\beta}_2^0,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^0$；

第 6 步：得正交变换结果，其中正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\beta}_1^0,\boldsymbol{\beta}_2^0,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n^0]$，对角化结果 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，故利用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，得标准形为

$$f=[y_1,y_2,\cdots,y_n]\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

小试牛刀

【例 6.1】 利用正交变换法将二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形.

解析 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$. 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$，得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对 $\lambda_1=1$，解方程 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2=2$，解方程 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3=5$，解方程 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向

量$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

单位化：令$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=$

$\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

（2）配方法

魔研君点睛

需要配方的二次型往往会有两种类型：

（1）类型一：二次型中含有平方项，只需依次给平方项不为零的项进行配方；

（2）类型二：二次型中不含有平方项，这时，首先需要变换出平方项，一般进行如下变换导出平方项：$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\\\vdots\end{cases}$出现平方项后，按照类型一进行处理.

【注】 配方法一定要检验是否为可逆线性变换，当变换不为可逆线性变换时所化成的结果不一定是二次型的标准形.

小试牛刀

【例 6.2】 利用配方法再将例 6.1 化为标准形.

解析 对于平方项部分依次配方，得

$$f=2x_1^2+3\left(x_2^2+\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{4}{9}x_3^2\right)-\frac{4}{3}x_3^2+3x_3^2$$
$$=2x_1^2+3\left(x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2.$$

令$\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2+\frac{2}{3}x_3=y_2,\\x_3=y_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_2-\frac{2}{3}y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$则$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{C}=$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$.

很明显 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故二次型所化标准形为 $f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$.

三、正定二次型、正定矩阵

1. 定义 设有二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，则称 f 为正定二次型，并称对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

小试牛刀

【例 6.3】 判定 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2$ 是否是正定二次型.

解析 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，此时 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2=0$，故 f 不是正定二次型.

2. 充要条件

$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型(或对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵)

$\Leftrightarrow$对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

$\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全为正

$\Leftrightarrow$存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全为正.

考试题型与解析

题型一：二次型基本概念型考题(对应矩阵、秩、正负惯性指数)

魔研君点睛

二次型 f 与二次型所对应的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一一对应的关系，其性质也具有一一对应关系：

(1) 二次型的秩 $r(f)=r(\boldsymbol{A})$；

(2) 二次型的正、负惯性指数求法：

① 方法 1　求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，特征值中正的个数为正惯性指数，负的个数为负惯性指数(依据正交变换法所化标准形平方项系数为特征值)；

② 方法 2(配方法)　化得标准形，正的平方项的个数为正惯性指数，负的平方项的个数为负惯性指数.

【例 6.4】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

解析 由 $r(\boldsymbol{A})=1$ 知零特征值的重数为 2，又因为 $\boldsymbol{A}$ 中各行元素之和为 3，所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 3 是它的特征值. 因为正交变换法所化标准形平方项系数为特征值，则标准形为 $f=3y_1^2$.

【例 6.5】 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则二次型

x^TAx 经正交变换化为标准形(　　).

(A) $-3y_1^2-3y_2^2-3y_3^2$　　(B) $-3y_1^2+y_2^2-3y_3^2$

(C) $3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$　　(D) $3y_1^2+3y_2^2-y_3^2$

解析　设 A 的特征值为 λ，则 $A^3+2A^2-2A+3E$ 的特征值为 $\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3$.

由于零矩阵的所有特征值均为 0，则 $(\lambda+3)(\lambda^2-\lambda+1)=0$，实对称矩阵的所有特征值均为实数，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-3$.

正交变换法所化标准形平方项系数为特征值，则标准形为

$$f=-3y_1^2-3y_2^2-3y_3^2.$$

故本题选(A).

【例 6.6】　二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$ 的矩阵是________，秩是________($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零).

解析　记 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\alpha x})=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x},$$

因为二次型矩阵为 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2a_n \\ a_na_1 & \cdots & a_na_2 & a_n^2 \end{pmatrix}$，又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零，从而知 $r(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})=1$，即该二次型矩阵的秩为 1.

【例 6.7】　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是________________.

解析　
$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3 \\ &=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2. \end{aligned}$$

由于二次型的负惯性指数为 1，故 $4-a^2\geqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

魔研君点睛

1. 解析中所用配方法，一定还要检验是否为可逆线性变换法，在本题中，令 $\begin{cases} x_1+ax_3=y_1, \\ x_2-2x_3=y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$ 则 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，其中，$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，则是可逆线性变换.

2. 惯性指数还有另一种思路，就是利用特征值，对于二次型，所对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$，利用特征方程求出特征值，根据特征值中仅有一个为负数进行求解.

题型二：二次型化标准形

魔研君点睛

此类考题在考研当中主要考查两种方法：正交变换法和配方法. 对于正交变换法，核心思路就是"实对称矩阵的正交相似对角化"；而配方法一定要注意需要检验是否是可逆线性变换.

【例 6.8】 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}$ 是三阶正交矩阵，试求常数 α,β.

解析 写出经正交变换二次型 f 的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，因此有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，即知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0,1,2，那么有

$$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2=0,\\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-2\alpha\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=0.$$

【例 6.9】 已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中，二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 6，且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&-1&-3\\1&0&1\end{pmatrix}$.

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型 f 为标准形，并写出所用的坐标变换；

(2) 求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 的值.

解析 (1) 由 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 6，得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\lambda_1=6$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=6$ 的特征向量.

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，由特征值和特征向量的定义可知，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的特征向量. 将之正交化，得 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. 再将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化分别得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，则经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 后二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $f=6y_1^2$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 6,0,0，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 7,1,1，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=7$.

【例 6.10】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

解析 (1) 由二次型的秩为 2,知 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$,故 $r(\boldsymbol{A})=2$,对 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

可得 $a=-1$.

(2) 当 $a=-1$ 时,得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

可得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=0$ 时,解方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=2$ 时,解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=6$ 时,解方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,2]^{\mathrm{T}}$.

因为特征值各不相等,所以特征向量相互正交,故只需单位化,得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,-1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,2]^{\mathrm{T}},$$

于是得到正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

由正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下,二次型的标准形为 $f=2y_2^2+6y_3^2$.

【例 6.11】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$,通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

解析 由二次型的定义:含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式(即每项都是二次的多项式),得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad 其中\ a_{ij}=a_{ji},$$

其为 n 元二次型,令 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,则二次型可用矩阵乘法表示为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵($\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$),为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵.

写出二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$,它的特征方程是

$$|\lambda E-A|=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & -a\\ 0 & -a & \lambda-3\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0.$$

f 经正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，标准形中平方项的系数为 1，2，5，就是 A 的特征值. 把 $\lambda=1$ 代入特征方程，得 $a^2-4=0\Rightarrow a=\pm 2$. 因 $a>0$ 知 $a=2$，这时 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=1$，由 $(E-A)x=0$. $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $x_1=[0,1,-1]^T$.

对于 $\lambda_2=2$，由 $(2E-A)x=0$. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $x_2=[1,0,0]^T$.

对于 $\lambda_3=3$，由 $(5E-A)x=0$. $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $x_3=[0,1,1]^T$.

将 x_1,x_2,x_3 单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

故所用的正交变换矩阵为 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

题型三：矩阵合同、矩阵相似、矩阵等价

魔研君点睛

矩阵合同、矩阵相似、矩阵等价这 3 个概念考研中常考，因此彼此间必须要有详细的区分，并且要明确每一个的判别方法.

1. 矩阵等价

等价：矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称 A 与 B 等价.

等价的充要条件：

$A\cong B\Leftrightarrow A,B$ 是同型矩阵且有相同的秩

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$.

2. 矩阵相似

相似：设 A,B 是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则称 A 与 B 相似，记为：$A\sim B$.

判定方法：

(1) 第 1 步：首先分别求两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值 λ_A,λ_B. 若 $\lambda_A\neq\lambda_B$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似；若 $\lambda_A=\lambda_B$，则需要进一步判断.

(2) 第 2 步：再分别判定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 能否相似对角化. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可相似对角化，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，否则不相似.

3. 矩阵合同

合同：两个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同.

合同的充要条件：二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正、负惯性指数.

【注】 矩阵相似必定合同.

【例 6.12】

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似

解析 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以必相似于对角阵.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}=\lambda^3(\lambda-4)=0.$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$，故必存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，因此 \boldsymbol{A} 与 \boldsymbol{B} 相似.$$

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的正负惯性指数，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 也合同，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 既合同且相似. 故选(A).

【例 6.13】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列后再交换第 i 行和第 j 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

(A) 等价但不相似　　(B) 相似但不合同

(C) 相似、合同，但不等价　　(D) 等价、相似、合同

解析 根据题意，$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 可逆，且 $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}$，$\boldsymbol{E}_{ij}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价、相似、合同. 故选(D).

【例 6.14】

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

解析　$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$，则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数都是 1.

(A)：特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$，负惯性指数为 2，不合同.

(B)：特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$，正惯性指数为 2，不合同.

(C)：特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$，正惯性指数为 2，不合同.

(D)：特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$，则 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$，正、负惯性指数都为 1，合同. 故选(D).

题型四：二次型的正定与矩阵的正定

魔研君点睛

考查二次型的正定与矩阵的正定其实是一个问题，两者是等价的. 处理这类问题，利用正定二次型的 5 个充分必要条件即可.

充要条件 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型(或对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵)

$\Leftrightarrow$对任何 $x\neq 0$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

$\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的所有特征值全为正

$\Leftrightarrow$存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全为正.

证明矩阵为正定矩阵时，首先证明矩阵为对称矩阵.

【例 6.15】　若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________.

解析　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$，二次型是正定的，则顺序主子式大于 0.

(1) $|2|=2>0$.

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1>0$.

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -t \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -t \\ \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix}=-\left(-1+\frac{t^2}{2}\right)>0.$

综上，得$\frac{t^2}{2}-1<0$，则 $t^2<2$，即$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

【例 6.16】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$，其中 k 为实数，求对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{B}$ 与$\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，并求 k 为何值时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

解析 利用特征值的性质，及对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 0.

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，2，0，从而 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 的特征值为$(k+2)^2$，$(k+2)^2$，k^2.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 也为实对称矩阵，可以对角化，故 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2&&\\&(k+2)^2&\\&&k^2\end{pmatrix}$相似，若 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则特征值全大于 0，从而 $k\neq0$，$k\neq-2$.

【例 6.17】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵，试证：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{B})=n$.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$，即$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})>0$. 于是，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，即对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$(若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，矛盾). 因此，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解. 故有 $r(\boldsymbol{B})=n$($\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{B})=n$).

充分性. 因 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. 根据实对称矩阵的定义知，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵. 若 $r(\boldsymbol{B})=n$，则线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以对于 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵(对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0$. 证毕.

【例 6.18】 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶，n 阶正定矩阵，试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$是否是正定矩阵.

解析 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵，由正定矩阵的性质可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}$ 是对称矩阵.

设 $m+n$ 维列向量 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})$，其中 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]$，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$. 若 $\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 不同时为$\boldsymbol{0}$，不妨设 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$.

又因为 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，故对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{y}$，恒有 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\geqslant0$. 于是 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})$. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}>0$，即 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 是正定二次型，因此 $\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.

自测题精选

1. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且有相同的特征值 1,2,2. 考虑以下结论：

① $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价；

② $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似；

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同；

④ 行列式 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，

其中成立的有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

2. 与二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既合同又相似的矩阵是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-8\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}4&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

3. 若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为(　　).

(A) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

4. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是(　　).

(A) 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数为零

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$

(C) 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$

(D) $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵与单位矩阵合同

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同，则(　　).

(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值　　(B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩

(C) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量　　(D) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&4\\2&2&4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，则二次型的矩阵为________，二次型的秩为________，正惯性指数为________.

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

8. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 的秩为 2,则 $a=$________,f 的规范形为________.

9. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型,则 t 的取值范围是________.

10. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,若矩阵 $k\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵,则 k 应满足________.

11. 用正交变换化二次型 $2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形,并写出所用正交变换.

12. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

13. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\,(a>0)$ 通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

14. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 实矩阵,满足 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=n$,证明:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 正定.

自测题解题参考

1. 由于$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=1\times2\times2=4$，则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可逆.

对于①，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$且$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$同型，则$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

对于②，特征值相同的两个矩阵未必相似.

对于③，由于$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为实对称矩阵，故$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可相似对角化，特征值正、负个数分别为正、负惯性指数，则正、负惯性指数相等，则$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

对于④，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=(1-2)(2-2)(2-2)=0$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(1-1)(2-1)(2-1)=0$，故成立个数为3个. 故选(C).

2. f所对应矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，可得$\boldsymbol{A}$的特征值为$2,4,-2$.

相似矩阵具有相同的特征值. 故选(B).

3. 已知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，

则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$具有相同规范形.

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-2$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的正惯性指数为2，负惯性指数为1. 故选(A).

4. (A)为必要不充分条件. 由于$p+q\leqslant n$，

当$p=0$时，$q\leqslant n$，则$\boldsymbol{A}$不一定正定.

(B)为充分不必要条件. 当$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}$时，$\boldsymbol{A}$的全体特征值为1，则$\boldsymbol{A}$正定，但正定仅要求特征值大于0即可，未必要全为1.

(C)未说明是可逆矩阵，故不能说明$\boldsymbol{A}$正定. 故选(D).

5. 由于$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 故选(B).

6. 二次型对应的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&4\\2&2&4\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A})=2$，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-2&-4\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-2&-4\\0&-\lambda&\lambda\end{vmatrix}.$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4&-2\\-2&\lambda-6&-4\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-7\lambda-2),$$

则 $\lambda_1=0,\lambda_2=\dfrac{-7+\sqrt{57}}{2}>0,\lambda_3=\dfrac{-7-\sqrt{57}}{2}<0$，故正惯性指数为 1.

7．由于 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，且 $s=3-r(\boldsymbol{A})=2$，则零特征值重数为 2，即 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

又由于 $\boldsymbol{A}$ 每行元素之和为 3，则 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_3=3$，故标准形为 $3y_3^2$（或 $3y_1^2$ 和 $3y_2^2$ 均可）.

8．二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&a&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&a-2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

由于 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $a-2=0\Rightarrow a=2$，可求得 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $0,4+2\sqrt{2},4-2\sqrt{2}$，即规范形为 $z_1^2+z_2^2$.

9．二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，则其 3 个顺序主子式均大于 0，则

$$1>0,4-t^2>0,-4(t+2)(t-1)>0,$$

即 $-2<t<1$.

10．设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda^2+\lambda$.

由于 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda^2+\lambda=0$，即 $\lambda=0$ 或 -1，则 3 个特征值可能为

(1) $\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-1$；

(2) $\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$；

(3) $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=0$；

(4) $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=0$.

综上所述，当且仅当 $k<2$ 时，$k\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵.

11．二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&\lambda+1&0\\1&\lambda&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda),$$

则得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3,-1,0$.

当 $\lambda=3$ 时，由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&1\\&2&1\\&&0\end{pmatrix}$，解得 $\boldsymbol{x}_1=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$. 类

似地，当 $\lambda=-1$ 时，$\boldsymbol{x}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{x}_3=[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

特征值无重根，仅需单位化.

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，那么令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=3y_1^2-y_2^2$ 为所求标准形.

12.（1）二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\0 & a & -1\\1 & -1 & a-1\end{pmatrix}.$$

由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\0 & \lambda-a & 1\\-1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)[\lambda-(a+1)][\lambda-(a-2)],$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

（2）由于二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,，所以 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，秩为 2，于是 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=0$ 时，$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$，此时的规范形为 $y_1^2-y_2^2$，不合题意.

当 $a=-1$ 时，$\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=-3$，此时的规范形为 $-y_1^2-y_2^2$，不合题意.

当 $a=2$ 时，$\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，此时的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，符合题意.

综上可知，$a=2$.

13. 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & a\\0 & a & 3\end{pmatrix}$，特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\0 & \lambda-3 & -a\\0 & -a & \lambda-3\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$.

f 经正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，标准形中平方项的系数为 1,2,5 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 把 $\lambda=1$ 代入特性方程，得 $a^2-4=0\Rightarrow a=\pm2$，因 $a>0$，知 $a=2$，这时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{x}_1=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_2=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{x}_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_3=3$，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{x}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，故所用正交变换矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

14. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵.

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零 n 维向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\\&=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

由于 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=n$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 及 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}$ 不全为 $\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}>0$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 正定.

附录 小侯七谈考研数学备考攻略(数学一、二、三)

关于考研数学的复习方法,可谓是鱼龙混杂,网络上只要你“搜索”相关信息,就肯定有无数的“攻略”. 这些方法千篇一律,大同小异,有甚者更是互相抄袭,很没有新意,让考生觉得数学的复习不就是那样嘛:基础段看教材,强化段做题型,题型做完做真题,最后来个冲刺点睛.

在我看来,这些所谓的“攻略”都可以不看了,没经过脑子思考过的任何“攻略”都可以忽略. 基础段看教材没错,那应该怎么看?高等数学(高数)上册和下册各有什么侧重点?线性代数(线代)的核心是什么?概率论与数理统计(概统)无法理解怎么办?

另外还有,数学一、数学二、数学三都考高数(数学三中高数称为微积分),要求一样吗?都考线代,区别大吗?数学二不考概统,是不是意味着试卷很简单?

如果这些问题都想不清楚,那“攻略”就是个假“攻略”,学生看了一篇垃圾文,浪费时间又没有收获.

魔研数学团队,一群集美貌和才华于一身的小伙伴们通过踏踏实实的教学实践,以及真真正正的学员反馈,得出了一套有效的备考攻略,结合自己多年的思考和经验,经过整理、提炼并总结,给出如下考研数学备考攻略.

一、考研数学一备考攻略

首先要对数学一的考生说一说.

1. 高数是先“深”后“浅”

备考数学一的同学们都知道,考卷的内容含量特别多,涉及的学科也多,高数、线代和概统都考,尤其高数部分学的特别多,让数学二和数学三的同学看着都头疼,感觉总也学不完. 拼了命地看知识点,好不容易学完了二重积分,我的天呀,还有三重积分,好不容易复习完了三重积分,还有曲线积分和曲面积分,这可如何是好?!

但不知道考数学一的同学们注意到一个特点没有,虽然数学一的高数部分学得多,但是所谓多出来的内容,其实考得都特别“浅”. 什么叫“浅”呢?就是知识点考查的并不是那么灵活,只要你明白“它”是什么,知道怎么用,也就够了. 就拿曲线积分和曲面积分来说,如果你能够把历年这部分的真题集中起来做一遍,你就会惊奇地发现,考查的形式很雷同,虽然有变化,但绝对谈不上考法灵活.

曾经有同学(2018 考研,最终被复旦大学录取)和我说,他只做了同济大学《高等数学》(第七版)下半册的书上的例题和课后题,多元函数微分学、多元函数积分学,尤其是曲线积分和曲面积分章节的题,在上考场后一分都没丢,他甚至一度怀疑这部分知识是不是就是教材例题的难度.

关于这位同学的反馈,我首先不得不承认他本身对数学具有较强的敏锐度,说白了就是

有数学天赋，然后我们再客观地谈谈他的话对不对．我的回答是，他说的很有道理．参照考研数学一大纲，对应同济大学《高等数学》（第七版）下半册里面的内容，确实考查的比书中例题难不了多少，也就是说同学们只要在基础段下足功夫，你就已经拿下了高数一半的天下．

比如我们看一下 2014 年数学一真题试卷第 18 题：

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

这道需要由高斯公式求解的题，在《高等数学》（同济大学第七版）第 11 章的例题中与课后题里就有相应的解法．

好了，说了半天高数的下半册，那么上半册呢？那就要另当别论了，因为这部分考查的内容就比较深了．

同学们看得出来，之前我说到了“浅”，现在开始又引出了“深”，字面意思也可以看得出来，那就是上半册的内容如果仅仅参考教科书（指的是同济大学《高等数学》（第七版））是不够的，需要我们灵活应对了，比如以下几点．

（1）极限的计算，不仅仅要熟练掌握等价无穷小代换、洛必达法则，还要会用泰勒公式求解极限问题．例如 2008 年数学一试卷第 15 题：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$，这道题如果会泰勒公式的用法，那就方便得多，当然了，这道题方法很多，不仅限于泰勒公式．

（2）导数的定义，就那么两个形式的公式，但是可以考查的难度却非常大，例如 2001 年数学一试卷第 8 题：

设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）．

（A）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　（B）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　（D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f[f(2h)-f(h)]$ 存在

（3）定积分的综合能力考查，历来都是出难题的地方，例如 2012 年数学一试卷第 4 题：

设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$，则有（　　）．

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$

（C）$I_2<I_3<I_1$　　（D）$I_2<I_1<I_3$

这道看着不太大的小选择题，当年确实难倒了很多考生．

如此说来，反倒是高数的前半部分难度大于后半部分了．不过，这个难度并不代表得分率，并不是说高数前半部分难，得分率就低；后半部分考查的简单，得分率就高．由于大家在最开始复习的时候就对后半部分抱着“难”的预判，肯定“学不会”的心态，所以就导致从来没有真正的踏下心来学习，因而就真的没有学会，也就丢了不该丢的分．

说了这么多，我就是要告诉同学们一个道理，那就是高数的学习是上半部分难，下半部分较常规，在练就基本功时切不可本末倒置，用力点错位，那样到最后，你上半部分由于下功夫少而学得肤浅，下半部分由于恐慌心理而丢了本不该丢的分，最后导致高数学得一塌糊涂．

句句发自肺腑，望同学们能够理解我的话．

2. 线代一直被误导

线代这门学科,在量子物理、人工智能、机器学习等现今最热门最高精尖的学科中都占据着极为重要的位置.

在一次上海新东方的数学教研会上,崔原铭老师和我说了一个现象,我很感兴趣.他说他研究了中国很多大学的教材,发现基本所有的教材都是从行列式开始,而行列式又是从逆序数开始,在逆序数的基础上推导出一堆公式,让人感觉线代就是一门纯粹靠数学推导出来的学科,其实并非如此.

MIT 教授 Gilbert Strang 所著的线代教材一直被称为"世界上最好的线代教材",它并没有从行列式引入,而是从解一个简单的二元一次方程组引入,娓娓道来,用通俗易懂的语言给我们讲解了线代,究其全书,其实是在讲述一个道理——线代的核心就是解方程,也就是我们常用的同济版教材的第 4 章线性方程组所讲的内容.而第 3 章向量的线性相关、线性无关、线性表出等内容其实就是方程组有解、无解,它们的本质是一样的.

所以,其实线代正确的思维脉络是这样的:第 3～4 章讲述了方程组描述的两种方式——向量的线性组合或者矩阵相乘,而第 1～2 章是处理方程组的必要工具,第 5～6 章特征值和二次型其实是线性代数的应用,其核心还是解方程.

讲了这么多,我并不是要同学们看着教材从第 3 章开始复习,而是要告诉大家,线代是一个整体,这个整体是以解方程为核心,牢牢掌握这个核心来复习做题,思路就会非常清晰,也会事半功倍.

3. 被低估的概统

几乎所有辅导书或者辅导老师都会告诉你,概统是考研数学三门课里最简单、最好拿分的一门,但当你翻开教材时,你却懵了,这么多公式,让人抓狂啊!然后开始死背公式,最后也不知道哪些该背哪些不该背,严重影响了复习节奏.

我一直认为,理解性记忆或者说推导性记忆才是数学最行之有效的记忆方式,而市面上常用的教材大都讲解性的文字偏少,公式推导较多,对于考研来说,当然可以说它较为全面地列出了知识点,但是对大家理解这门课却无形中加大了难度.推荐大家在复习概率统计前,先去网上找找科普小文章,或者去找一些著名统计学教授写的教材看一看,我非常推崇陈希孺老先生所著的一系列著作,陈先生善于用通俗易懂的语言,生动形象的例子为大家详细讲述概统的知识,我读过也受益匪浅.但是话说回来,教材虽然难,但对考研来说贵在知识点全面,推导过程严谨.

那又有人会问,难道别人说概统简单是骗我们的吗?当然不是.真正的考研中,概统的考题是出得最模式化的,两道大题基本就是一题概率分布,一题参数估计,逃不出那么一个小圈子.这就又告诉我们,复习概统时同学们不要一味光看书,不要想把书先完全搞懂之后再来做题,因为概统这门学科是需要例子来帮助理解的,看完一章就做一章的题,可能看书时不理解的某个知识点就迎刃而解了.

以上就是数学一试卷中高数、线代和概统的备考攻略,我把我所理解的学科特点也都毫无保留地讲了出来,希望同学们能有所收获.

在时间分配上,我的建议如下.

(1) 基础段(3 月初～5 月底).这一阶段搞定知识点,别去搞什么真题、难题,不会走就

想跑，自找苦吃嘛.这一阶段完全可以买一本基础用书，比如《魔研考研数学系列丛书》就蛮好，所谓举贤不避亲，好的书干嘛不推荐.另外，这段终止时间是5月底，这个没问题，但起始时间就不一定非得3月初了，早点准备肯定要更好点.

(2) 强化段(6月初～8月底). 这段对于在校生来说，正好是暑假，对于毕了业的同学来说就没什么特殊的时间意义了，但是无论在校生还是毕业生，要想在考研中拿到好成绩，就必须在这3个月按题型强化训练，静下心来心无旁骛地刷题，可能对你更有好处.近些年来社会上很多反对“题海”战术的声音，难道小侯七老师支持题海？我也不支持，但是我觉得大家的做题量远达不到“海”吧.

(3) 真题段(9月初～10月底). 这两个月刷真题，而且完全可以在强化段便开启真题的训练.这么多年的考研试卷，累计起来足够了，而且时间充足的话，可以跨做数学二、数学三的真题，因为你会发现很多面孔竟然如此熟悉.

(4) 冲刺段(11月初至考前). 模拟题选着做，个人不做评价，根据你的自信程度.因为很多同学不自信，看到新的模拟卷出来，不做的话总觉得少点什么，于是乎便疯狂地刷模拟卷.我个人认为，这阶段不要盲目刷题了，要有自己的判断，哪里薄弱补哪里，而不是把会的题重复做，不会的却一直没解决.去年冲刺段，我给学生来了一次“黑暗角落大清理”，把曲线积分、曲面积分、散度、旋度、梯度、差分方程等所谓的小知识点整理起来讲解，你猜怎么着？当然是命中了真题考点.这算我牛吗？当然不算，我只是进行了常规的知识点扫盲，你做你也能命中.那这说明什么？冲刺段扫盲知识点的重要性啊！

二、考研数学二备考攻略

现在我针对数学二的同学说一说.

由于数学一我说得比较多了，因而数学二重复的地方不多说了.在时间规划上，与数学一是完全一致的，具体科目上其实也是大同小异.

有人说数学二的高数部分会不会比较难？这个完全不用担心，难度没有明显的差距.但数学二的题目具有很高的灵活性，考查也比较细致.

这是有客观原因的，数学二在高数方面的比重达到78%，也就是117分，然而数学二考查的知识点却比较少，所以这就注定了数学二的题目具有很高的灵活性.

线代基本上和数学一样(唯一不同的是数学一的大纲中多了向量空间部分的知识)，难度也差不多.

概统呢？这个，咱不考，所以就不聊了.

三、考研数学三备考攻略

关于数学三的备考攻略，也可参照数学一.线代(唯一不同的是数学一的大纲中多了向量空间部分的知识)和概统几乎差不多，高数(数学三中称为微积分)有些区别.

微积分部分，数学三更重视的是应用，经济学应用部分是它的特色.

时间分配上，完全参考数学一的吧.

洋洋洒洒写了这么多字，回头读来，觉得还是满意的.考研数学的特色和备考攻略就介绍这么多，按我所说的攻略来备考考研数学，效果应该会不错.

小侯七在这里携魔研考研数学团队的老师们，祝大家都考个好成绩.